Gesammelte Werke: Die Prinzipien der Mechanik

Heinrich Hertz


UNIVERSITY OF WISCONSIN
NUMEN
LUMEN
LIBRARY

GESAMMELTE WERKE

VON

HEINRICH HERTZ.

BAND III

DIE PRINZIPIEN DER MECHANIK.



LEIPZIG, 1894
JOHANN AMBROSIUS BARTH
(ARTHUR MEINER)

DIE
PRINZIPIEN DER MECHANIK

IN NEUEM ZUSAMMENHANGE DARGESTELLT

VON

HEINRICH HERTZ.

MIT EINEM VORWORTE

VON

H. VON HELMHOLTZ.

LEIPZIG, 1894
JOHANN AMBROSIUS BARTH
(ARTHUR MEINER)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Hiermit wird Heinrich Hertz' letztes Werk der Öffentlichkeit übergeben. Es bringt die Früchte der Arbeit seiner drei letzten Lebensjahre. Nach etwa einjähriger Arbeit war das Werk in seinen grofsen Zügen niedergeschrieben; die anderen beiden Jahre waren dem Ausbaue im Einzelnen gewidmet. Am Ende dieser Zeit betrachtete der Verfasser die erste Hälfte des Werkes als völlig abgeschlossen, die zweite Hälfte als der Hauptsache nach vollendet. Diese zweite Hälfte noch einmal durchzuarbeiten, war sein Plan. Schon aber waren die Pläne zu Wünschen geworden, und für die Wünsche gab es nur mehr Entsagung. Die Sonne, welche uns so hell noch einmal aus diesen Blättern leuchtet, neigte sich zum Untergange. — Kurz vor seinem Tode übergab der Verfasser selbst den gröfseren Teil des Manuskriptes der Verlagsbuchhandlung. Zugleich berief er den Unterzeichneten zu sich und wies ihn an, die Herausgabe zu besorgen, wenn er selbst dies nicht mehr würde thun können.

Indem ich die Drucklegung vom ersten Bogen an überwachte, achtete ich mit gröfster Sorgfalt auf getreue Wiedergabe des Originales, und zwar vor Allem des Sinnes desselben. Nicht minder war ich bestrebt, auch die Form zu wahren; aber dieselbe in allen Punkten festzuhalten, ohne Rücksicht auf Inhalt und Zusammenhang, wäre nicht im Sinne des Verfassers gewesen. Ich habe solche geringe Änderungen der Form eintreten lassen, von welchen ich nach sorgfältigem Studium des Werkes nicht zweifeln konnte, dafs sie der Verfasser

selbst würde angebracht haben. Von der Angabe dieser Änderungen im Einzelnen glaubte ich absehen zu dürfen, eben weil keine derselben den Sinn berührt. Um dies letztere verbürgen zu können, habe ich auch sämtliche Concepte und früheren Ausarbeitungen des Werkes gewissenhaft studiert. Solcher früherer Ausarbeitungen sind mehrere in sorgfältiger Niederschrift vorhanden, und sie sind zum Teil ausführlicher, als das letzte, für den Druck bestimmte Manuskript.

Die letzten Verbesserungen, welche der Verfasser noch nach Absendung des Manuskriptes in einem zweiten Exemplare desselben vermerkt hatte, sind alle vor dem Drucke nachgetragen worden. Die Hinweise auf frühere Stellen des Werkes, welche im zweiten Teile desselben spärlicher wurden und im letzten Abschnitte nur angedeutet waren, habe ich ergänzt, den geplanten Nachweis der Definitionen und Bezeichnungen zusammengestellt.

Besondere Aufmerksamkeit widmete ich auch der äufseren Gestaltung des Druckes, wie es des Verfassers Wunsch war. Ich hoffe, man wird, Dank der anerkennenswerten Mitwirkung der Verlagsbuchhandlung, die Ausstattung als des Werkes würdig befinden.

Bonn, Juni 1894.

Ph. Lenard.

Vorwort von H. v. Helmholtz.

Am 1. Januar 1894 starb Heinrich Hertz. Für alle, die den Fortschritt der Menschheit in der möglichst breiten Entwickelung ihrer geistigen Fähigkeiten und in der Herrschaft des Geistes über die natürlichen Leidenschaften wie über die widerstrebenden Naturkräfte zu sehen gewohnt sind, war die Nachricht vom Tode dieses bevorzugten Lieblings des Genius eine tief erschütternde. Durch seltenste Gaben des Geistes und Charakters begünstigt, hat er in seinem leider so kurzen Leben eine Fülle fast unverhoffter Früchte geerntet, um deren Gewinnung sich während des vorausgehenden Jahrhunderts viele von den begabtesten seiner Fachgenossen vergebens bemüht haben. — In alter, klassischer Zeit würde man gesagt haben, er sei dem Neide der Götter zum Opfer gefallen. Hier schienen Natur und Schicksal in ganz ungewöhnlicher Weise die Entwickelung eines Menschengeistes begünstigt zu haben, der alle zur Lösung der schwierigsten Probleme der Wissenschaft erforderlichen Anlagen in sich vereinigte. Es war ein Geist, der ebenso der höchsten Schärfe und Klarheit des

logischen Denkens fähig war, wie der gröſsten Aufmerksamkeit in der Beobachtung unscheinbarer Phänomene. Der uneingeweihte Beobachter geht an solchen leicht vorüber, ohne auf sie zu achten; dem schärferen Blicke aber zeigen sie den Weg an, durch den er in neue unbekannte Tiefen der Natur einzudringen vermag.

Heinrich Hertz schien prädestiniert zu sein, der Menschheit solche neue Einsicht in viele bisher verborgene Tiefen der Natur zu erschlieſsen, aber alle diese Hoffnungen scheiterten an der tückischen Krankheit, die, langsam und unaufhaltsam vorwärts schleichend, dieses der Menschheit so kostbare Leben vernichtete und alle darauf gesetzten Hoffnungen grausam zerstörte.

Ich selbst habe diesen Schmerz tief empfunden, denn unter allen Schülern, die ich gehabt habe, durfte ich Hertz immer als denjenigen betrachten, der sich am tiefsten in meinen eigenen Kreis von wissenschaftlichen Gedanken eingelebt hatte, und auf den ich die sichersten Hoffnungen für ihre weitere Entwickelung und Bereicherung glaubte setzen zu dürfen.

Heinrich Rudolf Hertz ward am 22. Februar 1857 in Hamburg als ältester Sohn des damaligen Rechtsanwalts, späteren Senators Dr. Hertz geboren. Nachdem er bis zu seiner Konfirmation den Unterricht in einer der städtischen Bürgerschulen erhalten hatte, trat er nach einem Jahre häuslicher Vorbereitung für höher reichende Studien in die Gelehrtenschule seiner Vaterstadt, das Johanneum, ein und verlieſs dieselbe 1875 mit dem Zeugnis der Reife. Er gewann schon als Knabe die Anerkennung seiner Eltern und Lehrer wegen seines ungewöhnlich regen Pflichtgefühls. Die Art seiner Begabung zeigte sich schon früh dadurch, daſs er aus eigenem Antriebe neben seinen Schulfächern mechanische Arbeiten an der Hobel- und Drehbank betrieb, daneben Sonntags die Gewerbeschule besuchte, um sich im geometrischen Zeichnen zu üben, und sich mit den einfachsten Hilfsmitteln brauchbare Instrumente optischer und mechanischer Art zu erbauen bestrebte.

Als er nach Beendigung seines Schulkursus sich zu der

Wahl eines Berufs entschliefsen mufste, wählte er den des Ingenieurs. Es scheint, dafs die auch in späteren Jahren als ein charakteristischer Grundzug seines Wesens hervortretende Bescheidenheit ihn an seiner Begabung für theoretische Wissenschaft zweifeln liefs, und dafs er sich bei der Beschäftigung mit seinen geliebten mechanischen Arbeiten des Erfolges sicherer fühlte, weil er deren Tragweite schon damals ausreichend verstand. Vielleicht hat ihn auch die in seiner Vaterstadt herrschende, mehr dem Praktischen zugeneigte Sinnesweise beeinflufst. Übrigens beobachtet man nicht selten diese Art zaghafter Bescheidenheit gerade bei jungen Leuten von hervorragenden Anlagen. Sie haben wohl eine deutliche Vorstellung von den Schwierigkeiten, die vor der Erreichung des ihnen vorschwebenden hohen Zieles zu überwinden sind, und müssen ihre Kräfte erst praktisch erprobt haben, ehe sie das zu ihrem schweren Werke nötige Selbstvertrauen gewinnen. Aber auch in ihrer späteren Entwickelung pflegen reich veranlagte Naturen um so unzufriedener mit ihren eigenen Werken zu sein je höher ihre Fähigkeiten und ihre Ideale reichen. Die Begabtesten erreichen offenbar nur deshalb das Höchste, weil sie am empfindlichsten gegen jede Unvollkommenheit sind, und am unermüdlichsten an deren Beseitigung arbeiten.

Volle zwei Jahre dauerte bei Heinrich Hertz dieses Stadium des Zweifels. Dann entschlofs er sich im Herbst 1877 zur akademischen Laufbahn, da er bei reifenden Kenntnissen sich innerlich überzeugte, dafs er nur in wissenschaftlicher Arbeit dauernde Befriedigung finden würde. Der Herbst 1878 führte ihn nach Berlin, wo ich ihn zuerst als Praktikanten in dem von mir geleiteten physikalischen Laboratorium der Universität kennen lernte. Schon während er die elementaren Übungsarbeiten durchführte, sah ich, dafs ich es hier mit einem Schüler von ganz ungewöhnlicher Begabung zu thun hatte, und da mir am Ende des Sommersemesters die Aufgabe zufiel, das Thema zu einer physikalischen Preisarbeit für die Studierenden vorzuschlagen, wählte ich eine Frage aus der Elektrodynamik, in der sicheren, nachher auch bestätigten

Voraussetzung, dafs Hertz sich dafür interessieren und sie mit Erfolg angreifen werde.

Die Gesetze der Elektrodynamik wurden damals in Deutschland noch von der Mehrzahl der Physiker aus der Hypothese von W. Weber hergeleitet, welche die elektrischen und magnetischen Erscheinungen auf eine Modifikation der Newton'schen Annahme von unmittelbar und geradlinig in die Ferne wirkenden Kräfte zurückzuführen suchte. Die Abnahme der betreffenden Kräfte in der Ferne sollte demselben Gesetze wie die von Newton angenommene Gravitationskraft und die von Coulomb zwischen je zwei elektrisierten Massenpunkten gemessene scheinbare Fernkraft folgen, es sollte nämlich die Intensität der Kraft dem Quadrate des Abstandes der auf einander wirkenden elektrischen Quanta umgekehrt, dem Produkte der beiden Quanta aber direkt proportional sein, und zwar mit abstofsender Wirkung zwischen gleichnamigen, anziehender zwischen ungleichnamigen Mengen. Übrigens wurde in Weber's Hypothese die Ausbreitung dieser Kraft durch den unendlichen Raum als augenblicklich und mit unendlicher Geschwindigkeit erfolgend vorausgesetzt. Der einzige Unterschied zwischen W. Weber's Annahme und der von Coulomb bestand darin, dafs Weber voraussetzte, auch die Geschwindigkeit, mit der sich die beiden elektrischen Quanta einander näherten oder von einander entfernten, und auch die Beschleunigungen dieser Geschwindigkeiten könnten einen Einflufs auf die Gröfse der Kraft zwischen den beiden elektrischen Mengen haben. Neben dieser Weber'schen Hypothese bestanden noch eine Reihe ähnlicher anderer, die alle das Gemeinsame hatten, dafs sie die Gröfse der Coulomb'schen Kraft noch durch den Einflufs irgend einer Komponente der Geschwindigkeit der bewegten elektrischen Quanta modifiziert ansahen. Solche Hypothesen waren von F.E. Neumann, von dessen Sohne C. Neumann, von Riemann, Grossmann, später von Clausius aufgestellt worden. Magnetisierte Molekeln galten als Achsen elektrischer Kreisströme, nach einer schon von Ampère aufgefundenen Analogie ihrer nach aufsen gerichteten Wirkungen.

Diese bunte Blumenlese von Annahmen war in ihren Folgerungen sehr wenig übersichtlich und erforderte zu ihrer Ableitung verwickelte Rechnungen, Zerlegungen der Einzelkräfte in ihre verschieden gerichteten Komponenten u. s. w. So war das Gebiet der Elektrodynamik um jene Zeit zu einer unwegsamen Wüste geworden. Beobachtete Thatsachen und Folgerungen aus höchst zweifelhaften Theorien liefen ohne sichere Grenze durcheinander. In dem Streben, dieses Wirrsal übersehen zu lernen, hatte ich es übernommen, das Gebiet der Elektrodynamik, so weit ich sah, zu klären, und die unterscheidenden Folgerungen der verschiedenen Theorien aufzusuchen, um wo möglich durch passend angestellte Versuche zwischen ihnen zu entscheiden.

Es ergab sich daraus folgendes allgemeine Resultat: Alle Erscheinungen, die vollkommen geschlossene Ströme bei ihrer Zirkulation durch in sich zurücklaufende metallische Leitungskreise hervorrufen und die die gemeinsame Eigentümlichkeit haben, dafs es, während sie fliefsen, zu keiner erheblichen Veränderung der in einzelnen Teilen des Leiters angesammelten elektrischen Ladungen kommt, liefsen sich aus allen den genannten Hypothesen gleich gut ableiten. Ihre Folgerungen stimmten sowohl mit Ampère's Gesetzen der elektromagnetischen Wirkungen, wie mit den von Faraday und Lenz entdeckten und von F. E. Neumann verallgemeinerten Gesetzen der induzierten elektrischen Ströme wohl überein. In unvollständig geschlossenen leitenden Kreisen dagegen führten die verschiedenen oben genannten Hypothesen zu wesentlich verschiedenen Folgerungen. Die erwähnte gute Übereinstimmung aller der verschiedenen damaligen Theorien mit den an vollständig geschlossenen Strömungen beobachteten Thatsachen erklärt sich leicht daraus, dafs man geschlossene Ströme beliebig lange Zeit und in beliebiger Stärke unterhalten kann, jedenfalls lange genug, dafs die von ihnen ausgeübten Kräfte volle Zeit haben, ihre Wirkungen sichtbar zu entfalten, dafs deshalb die thatsächlichen Wirkungen solcher Ströme und ihre Gesetze wohlbekannt und genau ermittelt waren. Daher würde jede Abweichung einer neu aufgestellten Theorie von

irgend einer der bekannten Thatsachen dieses wohl durchgearbeiteten Gebietes schnell aufgefallen und zur Widerlegung der Theorie benutzt worden sein.

Dagegen sammeln sich an den offenen Enden ungeschlossener Leiter, wo sich isolierende Massen zwischen diese Enden einschieben, durch jede elektrische Bewegung längs der Länge des Leiters sogleich elektrische Ladungen an, herrührend von der gegen das Ende des Leiters hindrängenden Elektricität, die ihren Weg durch den Isolator nicht fortsetzen kann. Eine aufserordentlich kurze Dauer der Strömung genügt in einem solchen Falle, um die abstofsende Kraft der am Ende angehäuften Elektricität gegen die gleichnamige nachdrängende so hoch zu steigern, dafs diese in ihrer Bewegung vollständig gehemmt wird, wonach zunächst das weitere Zuströmen aufhört und nach momentaner Ruhe dann ein schnelles Zurückdrängen der angesammelten Elektricität folgt.

Es war für jeden Kenner der thatsächlichen Verhältnisse zu jener Zeit klar, dafs sich das vollkommene Verständnis der Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen nur durch die genaue Untersuchung der Vorgänge bei diesen sehr schnell vorübergehenden ungeschlossenen Strömen werde gewinnen lassen. W. Weber hatte versucht, gewisse Schwierigkeiten seiner elektrodynamischen Hypothese zu beseitigen oder zu vermindern dadurch, dafs er sich auf die Möglichkeit berufen, die Elektricität könne einen gewissen Grad von Beharrungsvermögen haben, wie es den schweren Körpern zukomme. Scheinbar zeigen bei Schliefsung und Unterbrechung jedes Stromes sich Wirkungen, die den Anschein eines Beharrungsvermögens der Elektricität vortäuschen. Diese rühren aber von der sogenannten elektrodynamischen Induktion d. h. von einer gegenseitigen Einwirkung nahe gelegener Stromleiter auf einander her und sind in ihren Gesetzen seit Faraday wohlbekannt. Wahres Beharrungsvermögen müfste nur der Masse der bewegten Elektricität proportional sein, ohne von der Lage des Leiters abzuhängen. Wenn etwas derart existierte, müfste es sich durch eine Verlangsamung der oscillierenden Bewegungen der Elektricität zu erkennen geben, wie sie nach jähen Unter-

brechungen elektrischer Ströme in gut leitenden Drähten sich zeigen. Auf diesem Wege liefs sich die Bestimmung einer oberen Grenze für den Wert dieses Beharrungsvermögens erwarten, und deshalb stellte ich die Aufgabe, über die Gröfse von Extraströmen Versuche auszuführen. Aus diesen sollte wenigstens eine obere Grenze für die bewegte Masse festgestellt werden. Es waren schon in der Aufgabe, als zu diesen Versuchen besonders geeignet erscheinend, Extraströme aus doppeltdrähtigen Spiralen vorgeschlagen, deren Zweige in entgegengesetzter Richtung durchflossen wären. In der Lösung dieser Aufgabe bestand die erste gröfsere Arbeit von Heinrich Hertz. Er giebt darin eine präcise Antwort auf die gestellte Frage und zeigt, dafs höchstens $^1/_{20}$ bis $^1/_{30}$ des Extrastromes aus einer doppeltdrähtigen Spirale der Wirkung einer Trägheit der Elektricität zuzuschreiben sei. Diese Arbeit wurde mit dem Preise gekrönt.

Aber Hertz beschränkte sich nicht auf die vorgeschlagenen Versuche. Er erkannte nämlich, dafs bei geradlinig ausgespannten Drähten die Induktionswirkungen, trotz ihrer sehr viel geringeren Stärke, viel genauer zu berechnen waren, als bei Spiralen mit vielen Windungen, weil er hier die Lagerungsverhältnisse nicht genau abmessen konnte. Daher benützte er zu weiteren Versuchen eine Leitung aus zwei Rechtecken von geraden Drähten und fand hier, dafs der von dem Beharrungsvermögen herrührende Extrastrom höchstens $^1/_{250}$ von dem Werte des Induktionsstromes betrage.

Untersuchungen über den Einflufs der Centrifugalkraft in einer schnell rotierenden Platte auf die Bewegung eines sie durchfliefsenden elektrischen Stromes führten ihn zu einer noch viel tiefer liegenden oberen Grenze des Beharrungsvermögens der Elektricität.

Diese Versuche haben ihm offenbar die ungeheure Beweglichkeit der Elektricität eindringlich zur Anschauung gebracht und ihm geholfen, die Wege zu finden, um seine wichtigsten Entdeckungen zu machen.

In England waren durch Faraday ganz andere Vorstellungen über das Wesen der Elektricität verbreitet. Seine

in schwerverständlicher abstrakter Sprache vorgetragenen Ideen brachen sich nur langsam Bahn, bis sie in CLARK MAXWELL einen berufenen Interpreten fanden. FARADAY's Hauptbestreben bei der Erklärung der elektrischen Erscheinungen ging dahin, alle Voraussetzungen, bestehend in Annahmen von nicht direkt wahrnehmbaren Vorgängen oder Substanzen, auszuschliefsen. Vor allem wies er, wie es einst zu Anfang seiner Laufbahn schon NEWTON gethan, die Hypothese von der Existenz der Fernkräfte zurück. Es schien ihm undenkbar, wie die älteren Theorien annahmen, dafs direkte und unmittelbare Wirkungen zwischen zwei räumlich getrennten Körpern bestehen sollten, ohne dafs in den zwischenliegenden Medien irgend eine Veränderung vor sich gehe. Daher suchte er zunächst nach Spuren von Veränderungen in Medien, welche zwischen elektrisierten oder zwischen magnetischen Körpern lagen. Es gelang ihm der Nachweis von Magnetismus oder Diamagnetismus bei fast allen bisher für unmagnetisch geltenden Körpern. Ebenso wies er nach, dafs unter der Einwirkung elektrischer Kräfte gut isolierende Körper eine Veränderung erlitten; diese bezeichnete er als „dielektrische Polarisation der Isolatoren“.

Es liefs sich nicht verkennen, dafs die Anziehung zwischen zwei mit Elektricität beladenen Leitern oder zwischen zwei entgegengesetzten Magnetpolen in Richtung ihrer Kraftlinien sich wesentlich verstärken mufste, wenn man dielektrisch oder magnetisch polarisierte Medien zwischen sie einschaltete. Quer gegen die Kraftlinien mufste dagegen eine Abstofsung entstehen. Nach diesen Entdeckungen konnte nicht mehr geleugnet werden, dafs ein Teil der magnetischen und elektrischen Fernwirkung durch Vermittelung der zwischenliegenden polarisierten Medien zu stande käme, ein anderer konnte freilich immerhin noch übrig bleiben, der einer direkten Fernkraft angehörte.

FARADAY und MAXWELL neigten sich der einfacheren Annahme zu, dafs überhaupt Fernkräfte nicht existierten, und MAXWELL entwickelte die mathematische Fassung dieser Hypothese, welche allerdings eine vollständige Umkehr der bisherigen An-

schauungen verlangte. Danach mufste der Sitz der Veränderungen, welche die elektrischen Erscheinungen hervorbringen, nur noch in den Isolatoren gesucht werden, Entstehen und Vergehen der Polarisationen in den Isolatoren mufste der Grund der scheinbar in den Leitern stattfindenden elektrischen Bewegungen sein. Ungeschlossene Ströme gab es nicht mehr, denn die Anhäufung elektrischer Ladungen an den Enden der Leitung und die dabei in den sie trennenden Isolatoren auftretende dielektrische Polarisation stellte eine äquivalente elektrische Bewegung in den zwischenliegenden Isolatoren dar, die die Lücke des Stromes zu ergänzen geeignet schien.

Schon FARADAY hatte mit seiner sehr sicheren und tiefgehenden inneren Anschauung geometrischer und mechanischer Fragen erkannt, dafs die Verteilung der elektrischen Fernwirkungen im Raume nach diesen Annahmen genau mit der durch die alte Theorie gefundenen stimmen mufste.

MAXWELL bestätigte und erweiterte dies mit den Hilfsmitteln der mathematischen Analysis zu einer vollständigen Theorie der Elektrodynamik. Ich selbst erkannte sehr wohl das Zwingende in den von FARADAY gefundenen Thatsachen und untersuchte zunächst die Frage, ob Fernwirkungen überhaupt existierten uud in Betracht gezogen werden müssten. Der Zweifel schien mir zunächst in einem so verwickelten Gebiete der wissenschaftlichen Vorsicht gemäfs zu sein und konnte zu entscheidenden Versuchen hinleiten.

Das war der Stand der Frage, als HEINRICH HERTZ nach Beendigung seiner vorgenannten Preisarbeit in die Untersuchung eintrat.

Nach MAXWELL's Auffassung war es wesentlich entscheidend für seine Theorie, ob das Entstehen und Vergehen dielektrischer Polarisation in einem Isolator dieselben elektrodynamischen Wirkungen in der Umgebung hervorbringt, wie ein galvanischer Strom in einem Leiter. Diesen Nachweis zu erbringen erschien mir als eine ausführbare und hinreichend wichtige Arbeit, um sie zum Gegenstand einer der grofsen Preisaufgaben der Berliner Akademie zu machen.

Wie sich, an diese von den Zeitgenossen vorbereiteten Keime anknüpfend, die Entdeckungen von Hertz weiter entwickelten, hat er selbst in der Einleitung seines interessanten Buches: Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft so anschaulich und interessant entwickelt, dafs kein Anderer dazu etwas wesentliches oder gar besseres hinzufügen könnte. Dieser Bericht ist als eine höchst aufrichtige und eingehende Darstellung einer der wichtigsten und folgenreichsten Entdeckungen von hervorragendem Werte. Leider besitzen wir nicht viel ähnliche Akten über die innere psychologische Geschichte der Wissenschaft, und wir sind dem Verfasser auch dafür den gröfsten Dank schuldig, dafs er uns so tief in das Innere seiner Gedankenwerkstatt und selbst in die Geschichte seiner zeitweiligen Irrtümer hat schauen lassen.

Nur über die Folgen dieser neuen Entdeckungen wäre noch einiges hinzuzufügen.

Die Ansichten, deren Richtigkeit Hertz später bestätigt hat, waren allerdings, wie oben bemerkt, vor ihm durch Faraday und Maxwell als möglich oder selbst als höchst wahrscheinlich schon aufgestellt, aber die thatsächlichen Beweise ihrer Richtigkeit fehlten noch. Hertz hat nun in der That diese Beweise geliefert. Nur einem ungewöhnlich aufmerksamen Beobachter, der die Tragweite jeder unvermuteten und bis dahin unbeachteten Erscheinung sogleich durchschaut, konnten die höchst unscheinbaren Phänomene auffallen, die ihn auf den richtigen Weg geleitet haben. Es wäre eine hoffnungslose Aufgabe gewesen, schnell wechselnde Ströme mit einer Dauer von Zehntausendteilen oder gar nur Millionteilen einer Sekunde am Galvanometer oder mittels irgend einer anderen damals geübten experimentellen Methode sichtbar zu machen. Denn alle endlichen Kräfte brauchen eine gewisse Zeit zur Hervorbringung endlicher Geschwindigkeiten und zur Verschiebung von Körpern von irgend welchem Gewicht, auch so geringem, wie es die Magnetnadeln unserer Galvanometer zu haben pflegen. Aber elektrische Funken können zwischen den Enden einer Leitung sichtbar werden, wenn auch nur für ein Milliontel Sekunde die elektrische Spannung an den

Enden einer solchen Leitung hoch genug gesteigert wird, dafs der Funke eine winzige Luftschicht durchbrechen kann. Hertz war durch seine früheren Untersuchungen schon wohlbekannt mit der Regelmäfsigkeit und enormen Geschwindigkeit dieser sehr schnellen Oscillationen der Elektricität, und seine Versuche, auf diesem Wege die flüchtigsten elektrischen Bewegungen zu entdecken und sichtbar zu machen, gelangen ihm verhältnismäfsig schnell. Er fand sehr bald die Bedingungen, unter denen er die Oscillationen ungeschlossener Leitungen in solcher Regelmäfsigkeit erzielen konnte; dafs er ihre Abhängigkeit von den verschiedensten Nebenumständen ermitteln und dadurch die Gesetze ihres Auftretens und sogar den Wert ihrer Wellenlänge in der Luft und ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit ermitteln konnte. Bei dieser ganzen Untersuchung mufs man immer wieder den Scharfsinn seiner Überlegungen und sein experimentelles Geschick bewundern, die sich in der glücklichsten Weise ergänzten.

Hertz hat durch diese Arbeiten der Physik neue Anschauungen natürlicher Vorgänge von dem gröfsten Interesse gegeben. Es kann nicht mehr zweifelhaft sein, dafs die Lichtschwingungen elektrische Schwingungen in dem den Weltraum füllenden Äther sind, dafs dieser selbst die Eigenschaften eines Isolators und eines magnetisierbaren Medium hat. Die elektrischen Oscillationen im Äther bilden eine Zwischenstufe zwischen den verhältnismäfsig langsamen Bewegungen, welche etwa durch elastisch tönende Schwingungen magnetisierter Stimmgabeln dargestellt werden, und den ungeheuer schnellen Schwingungen des Lichts andererseits; aber es läfst sich nachweisen, dafs ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit, ihre Natur als Transversalschwingungen, die damit zusammenhängende Möglichkeit der Polarisationserscheinungen, der Brechung und Reflexion vollständig denselben Verhältnissen entsprechen wie bei dem Lichte und bei den Wärmestrahlen. Nur fehlt den elektrischen Wellen die Fähigkeit das Auge zu affizieren, wie diese auch den dunklen Wärmestrahlen fehlt, deren Schwingungszahl dazu nicht grofs genug ist.

Es ist gewifs eine grofse Errungenschaft, die vollständigen

Beweise dafür geliefert zu haben, dafs das Licht, eine so einflufsreiche und so geheimnifsvolle Naturkraft, einer zweiten ebenso geheimnisvollen, und vielleicht noch beziehungsreicheren Kraft, der Elektricität, auf das engste verwandt ist. Für die theoretische Wissenschaft ist es vielleicht noch wichtiger, verstehen zu können, wie anscheinende Fernkräfte durch Übertragung der Wirkung von einer Schicht des zwischenliegenden Medium zur nächsten fortgeleitet werden. Freilich bleibt noch das Rätsel der Gravitation stehen, die wir noch nicht folgerichtig anders, denn als eine reine Fernkraft zu erklären wissen.

Heinrich Hertz hat sich durch seine Entdeckungen einen bleibenden Ruhm in der Wissenschaft gesichert. Sein Andenken wird aber nicht nur durch seine Arbeiten fortleben, auch seine liebenswürdigen Charaktereigenschaften, seine sich immer gleichbleibende Bescheidenheit, die freudige Anerkennung fremden Verdienstes, die treue Dankbarkeit, die er seinen Lehrern bewahrte, wird Allen, die ihn kannten, unvergefslich sein. Ihm selbst war es nur um die Wahrheit zu thun, die er mit äufserstem Ernst und mit aller Anstrengung verfolgte; nie machte sich die geringste Spur von Ruhmsucht oder persönlichem Interesse bei ihm geltend. Auch da, wo er einiges Recht gehabt hätte, Entdeckungen für sich in Anspruch zu nehmen, war er eher geneigt stillschweigend zurückzutreten. Im ganzen still und schweigsam, konnte er doch heiter an fröhlichem Freundeskreise teilnehmen und die Unterhaltung durch manches treffende Wort beleben. Er hat wohl nie einen persönlichen Gegner gehabt, obgleich er gelegentlich über nachlässig gemachte oder renomistisch auftretende Bestrebungen, die sich für Wissenschaft ausgaben, ein scharfes Urteil fällen konnte. Sein äufserer Lebensgang verlief folgendermafsen: Im Jahre 1880 trat er als Assistent im Physikalischen Laboratorium der Berliner Universität ein; 1883 veranlafste ihn das preufsische Kultusministerium, sich in Kiel mit Aussicht auf baldige Beförderung zu habilitieren. Zu Ostern 1885 wurde er als ordentlicher Professor der Physik an die technische Hochschule zu Karlsruhe berufen. Hier machte er seine hauptsächlichsten

Entdeckungen, und hier verheiratete er sich mit Fräulein Elisabeth Doll, der Tochter eines Kollegen. Schon nach zwei Jahren erhielt er einen Ruf als Ordinarius der Physik an die Universität Bonn, dem er zu Ostern 1889 folgte.

In den nun folgenden leider so kurzen Jahren seines Lebens brachten ihm seine Zeitgenossen alle äufseren Zeichen der Ehre und Anerkennung entgegen. Im Jahre 1888 wurde ihm die Matteucci-Medaille von der italienischen Gesellschaft der Wissenschaften, 1889 von der Academie des Sciences in Paris der Preis La Caze und von der K. K. Akademie zu Wien der Baumgartner-Preis, 1890 die Rumford-Medaille von der Royal Society in London, 1891 der Bressa-Preis von der Königlichen Akademie in Turin verliehen.

Die Akademien von Berlin, München, Wien, Göttingen, Rom, Turin und Bologna, sowie viele andere gelehrte Gesellschaften wählten ihn zum korrespondierenden Mitglied, und die preufsische Regierung verlieh ihm den Kronenorden.

Er sollte sich seines steigenden Ruhmes nicht lange erfreuen. Eine qualvolle Knochenkrankheit fing an sich zu entwickeln; im November 1892 schon trat das Übel drohend auf. Eine damals ausgeführte Operation schien das Leiden für kurze Zeit zurückzudrängen. Hertz konnte seine Vorlesungen, wenn auch mit grofser Anstrengung, bis zum 7. Dezember 1893 fortsetzen; am 1. Januar 1894 erlöste ihn der Tod von seinen Leiden.

Wie sehr das Nachsinnen von Hertz auf die allgemeinsten Gesichtspunkte der Wissenschaft gerichtet war, zeigt auch wieder das letzte Denkmal seiner irdischen Thätigkeit, das vorliegende Buch über die Prinzipien der Mechanik.

Er hat versucht, darin eine konsequent durchgeführte Darstellung eines vollständig in sich zusammenhängenden Systems der Mechanik zu geben und alle einzelnen besonderen Gesetze dieser Wissenschaft aus einem einzigen Grundgesetz abzuleiten, welches logisch genommen natürlich nur als eine plausible Annahme betrachtet werden kann. Er ist dabei zu den ältesten theoretischen Anschauungen zurückgekehrt, die man eben deshalb auch wohl als die einfachsten und natürlichsten

ansehen darf, und stellt die Frage, ob diese nicht ausreichen würden, alle die neuerdings abgeleiteten allgemeinen Prinzipien der Mechanik konsequent und in strengen Beweisen herleiten zu können, auch wo sie bisher nur als induktive Verallgemeinerungen aufgetreten sind.

Die erste Entwickelung der wissenschaftlichen Mechanik knüpfte sich an die Untersuchungen des Gleichgewichts und der Bewegung fester Körper, die mit einander in unmittelbarer Berührung stehen, wofür die einfachen Maschinen, Hebel, Rollen, schiefe Ebenen, Flaschenzüge die erläuternden Beispiele gaben. Das Gesetz von den virtuellen Geschwindigkeiten ist die ursprünglichste, allgemeine Lösung aller dahin gehörigen Aufgaben. Später entwickelte Galilei die Kenntnis der Trägheit und der Bewegungskraft als einer beschleunigenden Kraft, die freilich von ihm noch dargestellt wird als eine Reihe von Stöfsen. Erst Newton kam zum Begriff der Fernkraft und ihrer näheren Bestimmung durch das Prinzip der gleichen Aktion und Reaktion. Es ist bekannt, wie sehr anfangs ihm selbst und seinen Zeitgenossen der Begriff unvermittelter Fernwirkung widerstrebte.

Von da ab entwickelte sich die Mechanik weiter unter Benutzung von Newton's Begriff und Definition der Kraft, und man lernte allmählich auch die Probleme behandeln, in denen sich konservative Fernkräfte mit dem Einflufs fester Verbindungen kombinieren, deren allgemeinste Lösung in d'Alembert's Prinzip gegeben ist. Die allgemeinen prinzipiellen Sätze der Mechanik (Gesetz von der Bewegung des Schwerpunkts, der Flächensatz für rotierende Systeme, das Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte, das Prinzip der kleinsten Aktion) haben sich alle entwickelt unter der Voraussetzung von Newton's Attributen der konstanten, also auch konservativen Anziehungskräfte zwischen materiellen Punkten und der Existenz fester Verbindungen zwischen denselben. Sie sind ursprünglich nur unter der Annahme solcher gefunden und bewiesen worden. Man hat dann später durch Beobachtung gefunden, dafs die so hergeleiteten Sätze eine viel allgemeinere Geltung in der Natur in Anspruch nehmen durften, als aus ihrem Be-

weise folgte, und hat demnächst gefolgert, daſs gewisse allgemeinere Charaktere der NEWTON'schen konservativen Anziehungskräfte allen Naturkräften zukommen, vermochte aber diese Verallgemeinerung aus einer gemeinsamen Grundlage nicht abzuleiten. HERTZ hat sich nun bestrebt, für die Mechanik eine solche Grundanschauung zu finden, welche fähig wäre, eine vollkommene folgerichtige Ableitung aller bisher als allgemeingültig anerkannten Gesetze der mechanischen Vorgänge zu geben, und er hat das mit groſsem Scharfsinn und unter einer sehr bewundernswürdigen Bildung eigentümlich verallgemeinerter kinematischer Begriffe durchgeführt. Als einzigen Ausgangspunkt hat er die Anschauung der ältesten mechanischen Theorien gewählt, nämlich die Vorstellung, daſs alle mechanischen Prozesse so vor sich gehen, als ob alle Verbindungen zwischen den auf einander wirkenden Teilen feste wären. Freilich muſs er die Hypothese hinzunehmen, daſs es eine groſse Anzahl unwahrnehmbarer Massen und unsichtbarer Bewegungen derselben gebe, um dadurch die Existenz der Kräfte zwischen den nicht in unmittelbarer Berührung mit einander befindlichen Körpern zu erklären. Einzelne Beispiele, die erläutern könnten, wie er sich solche hypothetischen Zwischenglieder dachte, hat er aber leider nicht mehr gegeben, und es wird offenbar noch ein groſses Aufgebot wissenschaftlicher Einbildungskraft dazu gehören, um auch nur die einfachsten Fälle physikalischer Kräfte danach zu erklären. Er scheint hierbei hauptsächlich auf die Zwischenschaltung cyklischer Systeme mit unsichtbaren Bewegungen Hoffnung gesetzt zu haben.

Englische Physiker, wie Lord KELVIN in seiner Theorie der Wirbelatome, und MAXWELL in seiner Annahme eines Systems von Zellen mit rotierendem Inhalt, die er seinem Versuch einer mechanischen Erklärung der elektromagnetischen Vorgänge zu Grunde gelegt hat, haben sich offenbar durch ähnliche Erklärungen besser befriedigt gefühlt, als durch die bloſse allgemeinste Darstellung der Thatsachen und ihrer Gesetze, wie sie durch die Systeme der Differentialgleichungen der Physik gegeben wird. Ich muſs gestehen, daſs ich selbst bisher an dieser letzteren Art der Darstellung festgehalten,

und mich dadurch am besten gesichert fühlte; doch möchte ich gegen den Weg, den so hervorragende Physiker, wie die drei genannten, eingeschlagen haben, keine prinzipiellen Einwendungen erheben.

Freilich werden noch grofse Schwierigkeiten zu überwinden sein bei dem Bestreben, aus den von Hertz entwickelten Grundlagen Erklärungen für die einzelnen Abschnitte der Physik zu geben. Im ganzen Zusammenhange aber ist die Darstellung der Grundgesetze der Mechanik von Hertz ein Buch, welches im höchsten Grade jeden Leser interessieren mufs, der an einem folgerichtigen System der Dynamik, dargelegt in höchst vollendeter und geistreicher mathematischer Fassung, Freude hat. Möglicherweise wird dieses Buch in der Zukunft noch von hohem heuristischen Wert sein als Leitfaden zur Entdeckung neuer allgemeiner Charaktere der Naturkräfte.

Vorwort des Verfassers.

Alle Physiker sind einstimmig darin, dafs es die Aufgabe der Physik sei, die Erscheinungen der Natur auf die einfachen Gesetze der Mechanik zurückzuführen. Welches aber diese einfachen Gesetze sind, darüber herrscht nicht mehr die gleiche Einstimmigkeit. Die Meisten verstehen unter jener Bezeichnung wohl schlechthin die Newton'schen Gesetze der Bewegung. In Wahrheit aber erhalten diese letzteren Gesetze ihren inneren Sinn und ihre physikalische Bedeutung erst durch den stillen Nebengedanken, dafs die Kräfte, von welchen sie reden, einfacher Natur sind und einfache Eigenschaften haben. Was nun aber hier noch einfach und noch zulässig sei, und was schon nicht mehr, das steht nicht fest; eben hier ist der Punkt, wo die Berufung auf allgemeine Einstimmigkeit aufhört. Daher sehen wir auch wirklich Meinungsverschiedenheiten entstehen, ob diese oder jene Annahme noch der gewöhnlichen Mechanik entspreche, oder ob nicht mehr. Dafs hier offene Fragen liegen, tritt freilich nur bei neuen Aufgaben hervor, hier aber als erstes Hindernis der Untersuchung. So ist z. B. der Versuch verfrüht, die Bewegungs-

gleichungen des Äthers auf die Gesetze der Mechanik zurückführen zu wollen, solange man sich nicht eindeutig darüber verständigt hat, was man mit diesem Namen bezeichnet haben will.

Die Aufgabe, deren Lösung die folgende Untersuchung anstrebt, ist diese, die hier vorhandene Lücke auszufüllen und eine vollkommen bestimmte Zusammenstellung der Gesetze der Mechanik anzugeben, welche mit dem Stande unserer heutigen Kenntnis verträglich ist, welche nämlich in Beziehung auf den Umfang dieser Kenntnis weder zu eng ist, noch zu weit. Die Zusammenstellung soll nicht zu eng sein, das heifst, es soll keine natürliche Bewegung geben, welche ihren Forderungen nicht gehorcht. Die Zusammenstellung aber soll auch nicht zu weit sein, das heifst, sie soll auch keine Bewegung zulassen, deren Vorkommen in der Natur schon nach dem Stande unserer heutigen Erfahrung ausgeschlossen ist. Ob die Zusammenstellung, welche ich als Lösung dieser Aufgabe im Folgenden gebe, die einzig mögliche ist, oder ob es andere, vielleicht bessere mögliche giebt, bleibt dahingestellt. Dafs aber die gegebene Zusammenstellung in jeder Hinsicht eine mögliche ist, beweise ich dadurch, dafs ich ihre Folgen entwickele, und zeige, dafs bei voller Entfaltung sie den Inhalt der gewöhnlichen Mechanik aufzunehmen vermag, sofern sich der letztere auf die wirklichen Kräfte und Zusammenhänge der Natur beschränkt und sich nicht als Spielplatz mathematischer Übungsarbeit betrachtet.

Durch diese Entwickelung ist freilich aus einer theoretischen Abhandlung ein Buch geworden, welches eine vollständige Übersicht aller wichtigeren allgemeinen Sätze der Dynamik enthält und welches sogar als ein systematisches Lehrbuch dieser Wissenschaft gelten kann. Zu einer ersten Einführung ist dasselbe freilich aus verschiedenen Gründen nicht wohl geeignet; mit umsomehr Überzeugung aber bietet es sich Demjenigen als Führer an, welcher den Inhalt der Mechanik aus der gewöhnlichen Darstellung schon einigermafsen kennt. Einem Solchen hofft es einen Standpunkt zeigen zu können, von welchem aus die physikalische Bedeu-

tung, die innere Verwandtschaft und die Tragweite der mechanischen Prinzipien in durchsichtiger Klarheit vor Augen liegt; von welchem aus auch der Begriff der Kraft wie die übrigen mechanischen Grundbegriffe des letzten Restes von Dunkelheit entkleidet erscheinen.

Die Aufgabe, welche sich die vorliegende Untersuchung stellt, ist in verdeckter Weise bereits behandelt und mit einer möglichen Lösung beantwortet durch von Helmholtz in seiner Arbeit über das Prinzip der kleinsten Wirkung und in der damit zusammenhängenden Arbeit über cyklische Systeme[1]. In der ersteren wird die These aufgestellt und vertreten, dafs die Mechanik auch dann noch die sämtlichen Vorgänge der Natur zu umfassen vermag, wenn man nicht nur die Newton'schen Grundlagen als allgemeingültig betrachtet, sondern auch die besonderen Voraussetzungen, welche neben jenen dem Hamilton'schen Prinzip zu Grunde liegen. In der zweitgenannten Arbeit wird zum ersten Male in allgemeiner Weise Sinn und Bedeutung der verborgenen Bewegungen behandelt. Von jenen Arbeiten ist meine eigene Untersuchung im Ganzen und in ihren Teilen wesentlich beeinflufst und abhängig; der Abschnitt über cyklische Systeme ist ihnen fast unmittelbar entnommen. Von der Form abgesehen, bestehen die Abweichungen meiner eigenen Lösung hauptsächlich in zwei Punkten: Einmal suche ich dasjenige von vornherein von den Elementen der Mechanik fern zu halten, was von Helmholtz durch nachträgliche Einschränkung aus der schon entwickelten Mechanik wieder entfernt. Zweitens entferne ich aus der Mechanik in gewissem Sinne weniger, indem ich mich nicht auf das Hamilton'sche Prinzip, noch auf ein anderes Integralprinzip stütze. Die Gründe hierfür und die Folgen hiervon werden aus der Arbeit selbst erhellen.

Ähnliche Gedankenreihen, wie in den von Helmholtz'schen Arbeiten sind angesponnen in der bedeutenden Abhandlung

[1] H. von Helmholtz, Über die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **100**, p. 137—166, 213—222, 1887; Prinzipien der Statik monocyklischer Systeme, ebenda, **97**, p. 111—140, 317—336, 1884.

von J. J. THOMSON über die physikalischen Anwendungen der Dynamik[1]). Ebenfalls entwickelt hier der Verfasser die Folgen einer Dynamik, welche neben den NEWTON'schen Gesetzen der Bewegung noch weitere, besondere, nicht ausdrücklich ausgesprochene Voraussetzungen zur Grundlage hat. Auch an diese Abhandlung also hätte ich mich anlehnen können; thatsächlich war meine eigene Untersuchung schon ziemlich fortgeschritten, als ich jene genauer kennen lernte. Das gleiche darf ich von den in mathematischer Hinsicht verwandten, aber weit älteren Arbeiten von BELTRAMI[2]) und LIPSCHITZ[3]) sagen; doch konnte ich noch reiche Anregung aus denselben schöpfen, ebenso aus der neueren Darstellung, welche DARBOUX[4]) von jenen Arbeiten mit eigenen Zusätzen gegeben hat. Manche mathematische Abhandlungen, welche ich hätte berücksichtigen können und sollen, mögen mir entgangen sein. In allgemeiner Hinsicht verdanke ich sehr viel dem schönen Buche über die Entwickelung der Mechanik von MACH[5]). Es ist selbstverständlich, dafs ich die bekannteren Lehrbücher der allgemeinen Mechanik zu Rate zog, nicht am wenigsten die umfassende Darstellung der Dynamik in dem Lehrbuche von THOMSON und TAIT[6]). Wertvoll war mir auch das Heft einer Vorlesung über analytische Dynamik von BORCHARDT, welches ich im Winter 1878/79 nachschrieb. Hiermit habe ich die von mir

---

[1]) J. J. THOMSON, On some Applications of Dynamical Principles to Physical Phenomena, Philosophical Transactions **176**, II, p. 307—342, 1885.

[2]) BELTRAMI, Sulla teoria generale dei parametri differenziali; Memorie della Reale Accademia di Bologna, 25. Febbrajo 1869.

[3]) R. LIPSCHITZ, Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist. Journal für die reine und angewandte Mathematik, **74**, p. 116—149, 1872. Bemerkungen zu dem Prinzip des kleinsten Zwanges. Ebenda, **82**, p. 316—342, 1877.

[4]) G. DARBOUX, Leçons sur la théorie générale des surfaces, Livre V, Chapitres 6, 7, 8. Paris 1889.

[5]) E. MACH, Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt. Leipzig 1883.

[6]) W. THOMSON und P. G. TAIT, Handbuch der theoretischen Physik, deutsche Ausgabe von HELMHOLTZ und WERTHEIM, Braunschweig 1871.

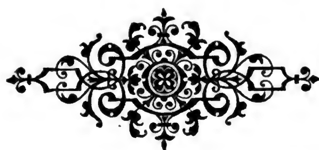
benutzten Quellen genannt; im Texte werde ich nur soviel citieren, als die Sache selbst es verlangt. Im einzelnen habe ich ja auch nichts vorzutragen, das neu wäre und nicht aus vielen Büchern genommen werden könnte. Was, wie ich hoffe, neu ist, und worauf ich einzig Wert lege, ist die Anordnung und Zusammenstellung des Ganzen, also die logische, oder, wenn man will, die philosophische Seite des Gegenstandes. Meine Arbeit hat ihr Ziel erreicht oder verfehlt, jenachdem in dieser Richtung etwas gewonnen ist oder nicht.

Inhalt.

	Nummer	Seite
Vorbemerkung des Herausgebers		V
Vorwort von H. v. Helmholtz		VII
Vorwort des Verfassers		XXIII
Inhalt		XXVIII
Einleitung		1
Erstes Buch. Zur Geometrie und Kinematik der materiellen Systeme.		
Vorbemerkung	1	53
Abschnitt 1. Zeit, Raum, Masse	2	53
Abschnitt 2. Lagen und Verrückungen der Punkte und Systeme Lage; Konfiguration und absolute Lage; Endliche Verrückungen a) der Punkte, b) der Systeme; Zusammensetzung der Verrückungen.	9	55
Abschnitt 3. Unendlich kleine Verrückungen und Bahnen der Systeme materieller Punkte Unendlich kleine Verrückungen; Verrückungen in Richtung der Koordinaten; Benutzung partieller Differentialquotienten; Bahnen der Systeme.	53	69
Abschnitt 4. Mögliche und unmögliche Verrückungen. Materielle Systeme Zusammenhang; Analytische Darstellung des Zusammenhanges; Bewegungsfreiheit; Verrückungen senkrecht zu den möglichen Verrückungen.	109	88
Abschnitt 5. Von den ausgezeichneten Bahnen der materiellen Systeme 1. Geradeste Bahnen; 2. Kürzeste und geodätische Bahnen; 3. Beziehungen zwischen geradesten und geodätischen Bahnen.	151	100
Abschnitt 6. Von der geradesten Entfernung in holonomen Systemen 1. Flächen von Lagen; 2. Geradeste Entfernung.	197	119
Abschnitt 7. Kinematische Begriffe 1. Vektorgröfsen in Bezug auf ein System; 2. Bewegung der Systeme, Geschwindigkeit, Moment, Beschleunigung, Energie, Benutzung partieller Differentialquotienten.	237	137
Schlufsbemerkung zum ersten Buch	295	153

Zweites Buch. Mechanik der materiellen Systeme.

		Nummer	Seite
Vorbemerkung	. . . .	296	157
Abschnitt 1.	Zeit, Raum, Masse	297	157
Abschnitt 2.	Das Grundgesetz . . . . Das Gesetz; Berechtigung desselben, Einschränkung desselben, Zerlegung desselben, Methode seiner Anwendung, Angenäherte Anwendung.	308	162
Abschnitt 3.	Bewegung der freien Systeme . . . . Allgemeine Eigenschaften der Bewegung: 1. Bestimmtheit der Bewegung, 2. Erhaltung der Energie, 3. Kleinste Beschleunigung, 4. Kürzeste Bahn, 5. Kürzeste Zeit, 6. Kleinstes Zeitintegral der Energie. Analytische Darstellung: Differentialgleichungen der Bewegung. Innerer Zwang der Systeme. Holonome Systeme. Dynamische Modelle.	331	170
Abschnitt 4.	Bewegung der unfreien Systeme . . . I. Geleitetes unfreies System. II. Systeme durch Kräfte beeinflufst: Einführung der Kraft, Wirkung und Gegenwirkung, Zusammensetzung der Kräfte, Bewegung unter dem Einflufs von Kräften, Innerer Zwang, Energie und Arbeit, Gleichgewicht und Statik, Maschinen und innere Kräfte, Messung der Kräfte.	429	199
Abschnitt 5.	Systeme mit verborgenen Massen . . I. Cyklische Bewegung: Cyklische Systeme, Kräfte und Kräftefunktion, Reciproke Eigentümlichkeiten, Energie und Arbeit, Zeitintegral der Energie. II. Verborgene cyklische Bewegung: Konservative Systeme, Differentialgleichungen der Bewegung, Integralsätze für holonome Systeme, Endliche Bewegungsgleichungen für holonome Systeme; Nichtkonservative Systeme.	546	235
Abschnitt 6.	Von den Unstetigkeiten der Bewegung Stofskraft oder Stofs; Zusammensetzung der Stösse; Bewegung unter dem Einflufs von Stössen; Innerer Zwang beim Stosse; Energie und Arbeit; Zusammenstofs zweier Systeme.	668	286
Schlufsbemerkung zum zweiten Buch	. . . .	734	306
Nachweis der Definitionen und Bezeichnungen	. . . . . .		309
Berichtigung	. . . .		312



Einleitung.

Es ist die nächste und in gewissem Sinne wichtigste Aufgabe unserer bewufsten Naturerkenntnis, dafs sie uns befähige, zukünftige Erfahrungen vorauszusehen, um nach dieser Voraussicht unser gegenwärtiges Handeln einrichten zu können. Als Grundlage für die Lösung jener Aufgabe der Erkenntnis benutzen wir unter allen Umständen vorangegangene Erfahrungen, gewonnen durch zufällige Beobachtungen oder durch absichtlichen Versuch. Das Verfahren aber, dessen wir uns zur Ableitung des Zukünftigen aus dem Vergangenen und damit zur Erlangung der erstrebten Voraussicht stets bedienen, ist dieses: Wir machen uns innere Scheinbilder oder Symbole der äufseren Gegenstände, und zwar machen wir sie von solcher Art, dafs die denknotwendigen Folgen der Bilder stets wieder die Bilder seien von den naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände. Damit diese Forderung überhaupt erfüllbar sei, müssen gewisse Übereinstimmungen vorhanden sein zwischen der Natur und unserem Geiste. Die Erfahrung lehrt uns, dafs die Forderung erfüllbar ist und dafs also solche Übereinstimmungen in der That bestehen. Ist es uns einmal geglückt, aus der angesammelten bisherigen Erfahrung Bilder von der verlangten Beschaffenheit abzuleiten, so können wir

an ihnen, wie an Modellen, in kurzer Zeit die Folgen entwickeln, welche in der äufseren Welt erst in längerer Zeit oder als Folgen unseres eigenen Eingreifens auftreten werden; wir vermögen so den Thatsachen vorauszueilen und können nach der gewonnenen Einsicht unsere gegenwärtigen Entschlüsse richten. — Die Bilder, von welchen wir reden, sind unsere Vorstellungen von den Dingen; sie haben mit den Dingen die eine wesentliche Übereinstimmung, welche in der Erfüllung der genannten Forderung liegt, aber es ist für ihren Zweck nicht nötig, dafs sie irgend eine weitere Übereinstimmung mit den Dingen haben. In der That wissen wir auch nicht, und haben auch kein Mittel zu erfahren, ob unsere Vorstellungen von den Dingen mit jenen in irgend etwas anderem übereinstimmen, als allein in eben jener einen fundamentalen Beziehung.

Eindeutig sind die Bilder, welche wir uns von den Dingen machen wollen, noch nicht bestimmt durch die Forderung, dafs die Folgen der Bilder wieder die Bilder der Folgen seien. Verschiedene Bilder derselben Gegenstände sind möglich und diese Bilder können sich nach verschiedenen Richtungen unterscheiden. Als unzulässig sollten wir von vornherein solche Bilder bezeichnen, welche schon einen Widerspruch gegen die Gesetze unseres Denkens in sich tragen und wir fordern also zunächst, dafs alle unsere Bilder logisch zulässige oder kurz zulässige seien. Unrichtig nennen wir zulässige Bilder dann, wenn ihre wesentlichen Beziehungen den Beziehungen der äufseren Dinge widersprechen, das heifst wenn sie jener ersten Grundforderung nicht genügen. Wir verlangen demnach zweitens, dafs unsere Bilder richtig seien. Aber zwei zulässige und richtige Bilder derselben äufseren Gegenstände können sich noch unterscheiden nach der Zweckmäfsigkeit. Von zwei Bildern desselben Gegenstandes wird dasjenige das zweckmäfsigere sein, welches mehr wesentliche Beziehungen des Gegenstandes wiederspiegelt als das andere; welches, wie wir sagen wollen, das deutlichere ist. Bei gleicher Deutlichkeit wird von zwei Bildern dasjenige zweckmäfsiger sein, welches neben den wesentlichen Zügen die geringere Zahl überflüssiger oder leerer Beziehungen enthält, welches also

das einfachere ist. Ganz werden sich leere Beziehungen nicht vermeiden lassen, denn sie kommen den Bildern schon deshalb zu, weil es eben nur Bilder und zwar Bilder unseres besonderen Geistes sind und also von den Eigenschaften seiner Abbildungsweise mitbestimmt sein müssen.

Wir haben bisher die Anforderungen aufgezählt, welche wir an die Bilder selbst stellen; etwas ganz anderes sind die Anforderungen, welche wir an eine wissenschaftliche Darlegung solcher Bilder stellen. Wir verlangen von der letzteren, daſs sie uns klar zum Bewuſstsein führe, welche Eigenschaften den Bildern zugelegt seien um der Zulässigkeit willen, welche um der Richtigkeit willen, welche um der Zweckmäſsigkeit willen. Nur so gewinnen wir die Möglichkeit an unsern Bildern zu ändern, zu bessern. Was den Bildern beigelegt wurde um der Zweckmäſsigkeit willen, ist enthalten in den Bezeichnungen, Definitionen, Abkürzungen, kurzum in dem, was wir nach Willkür hinzuthun oder wegnehmen können. Was den Bildern zukommt um ihrer Richtigkeit willen, ist enthalten in den Erfahrungsthatsachen, welche beim Aufbau der Bilder gedient haben. Was den Bildern zukommt, damit sie zulässig seien, ist gegeben durch die Eigenschaften unseres Geistes. Ob ein Bild zulässig ist oder nicht, können wir eindeutig mit ja und nein entscheiden und zwar mit Gültigkeit unserer Entscheidung für alle Zeiten. Ob ein Bild richtig ist oder nicht, kann ebenfalls eindeutig mit ja und nein entschieden werden, aber nur nach dem Stande unserer gegenwärtigen Erfahrung und unter Zulassung der Berufung an spätere reifere Erfahrung. Ob ein Bild zweckmäſsig sei oder nicht, dafür giebt es überhaupt keine eindeutige Entscheidung, sondern es können Meinungsverschiedenheiten bestehen. Das eine Bild kann nach der einen, das andere nach der andern Richtung Vorteile bieten, und nur durch allmähliches Prüfen vieler Bilder werden im Laufe der Zeit schlieſslich die zweckmäſsigsten gewonnen.

Dies sind die Gesichtspunkte, nach welchen man, wie mir scheint, den Wert physikalischer Theorieen und den Wert der Darstellung physikalischer Theorieen zu beurteilen hat. Jeden-

falls sind es die Gesichtspunkte, von welchen aus wir jetzt die Darstellungen betrachten wollen, welche man von den Prinzipien der Mechanik gegeben hat. Dabei ist es freilich zunächst nötig, bestimmt zu erklären, was wir mit diesem Namen bezeichnen.

In strengem Sinne verstand man ursprünglich in der Mechanik unter einem Prinzip jede Aussage, welche man nicht wieder auf andere Sätze der Mechanik selbst zurückführte, sondern welche man als unmittelbares Ergebnis anderer Quellen der Erkenntnis angesehen wissen wollte. Es konnte infolge der geschichtlichen Entwickelung nicht ausbleiben, dafs Sätze, welche unter besonderen Voraussetzungen einmal mit Recht als Prinzipien bezeichnet wurden, später diesen Namen, wiewohl mit Unrecht, beibehielten. Seit LAGRANGE ist die Bemerkung häufig wiederholt worden, dafs die Prinzipien des Schwerpunktes und der Flächen im Grunde nur Lehrsätze allgemeinen Inhalts seien. Man kann aber mit gleichem Rechte bemerken, dafs auch die übrigen sogenannten Prinzipien nicht unabhängig von einander diesen Namen führen können, sondern dafs jedes von ihnen auf den Rang einer Folgerung oder eines Lehrsatzes herabsteigen mufs, so bald die Darstellung der Mechanik auf eines oder mehrere der übrigen gegründet wird. Der Begriff des mechanischen Prinzipes ist demnach kein scharf festgehaltener. Wir wollen deshalb zwar jenen Sätzen in Einzelaussagen ihre herkömmliche Benennung belassen; wenn wir aber schlechthin und allgemein von den Prinzipien der Mechanik reden, so wollen wir darunter nicht jene einzelnen konkreten Sätze verstanden wissen, sondern jede übrigens beliebige Auswahl unter ihnen und unter ähnlichen Sätzen, welche der Bedingung genügt, dafs sich aus ihr ohne weitere Berufung auf die Erfahrung die gesamte Mechanik rein deduktiv entwickeln läfst. Bei dieser Bezeichnungsweise stellen die Grundbegriffe der Mechanik zusammen mit den sie verkettenden Prinzipien das einfachste Bild dar, welches die Physik von den Dingen der sinnlichen Welt und den Vorgängen in ihr herzustellen vermag. Und da wir von den Prinzipien der Mechanik durch verschiedene Auswahl der Sätze, welche wir zu Grunde legen, verschiedene Darstellungen geben können, so erhalten

wir verschiedene solche Bilder der Dinge, welche Bilder wir prüfen und mit einander vergleichen können in Bezug auf ihre Zulässigkeit, ihre Richtigkeit und ihre Zweckmäſsigkeit.

1.

Ein erstes Bild liefert uns die gewöhnliche Darstellung der Mechanik. Wir verstehen hierunter die in den Einzelheiten abweichende, in der Hauptsache übereinstimmende Darstellung fast aller Lehrbücher, welche das Ganze der Mechanik behandeln, fast aller Vorlesungen, welche sich über den gesamten Inhalt dieser Wissenschaft verbreiten. Diese Darstellung bildet den königlichen Weg und die groſse Heerstraſse, auf welcher die Schar der Schüler in das Innere der Mechanik eingeführt wird; sie folgt genau dem Gang der historischen Entwickelung und der Reihenfolge der Entdeckungen; ihre Hauptstationen sind gekennzeichnet durch die Namen eines Archimedes, Galilei, Newton, Lagrange. Als gegebene Vorstellungen legt diese Darstellung zu Grunde die Begriffe des Raumes, der Zeit, der Kraft und der Masse. Die Kraft ist dabei eingeführt als die vor der Bewegung und unabhängig von der Bewegung bestehende Ursache der Bewegung. Zuerst treten auf nur Raum und Kraft für sich, und ihre Beziehungen werden in der Statik behandelt. Die reine Bewegungslehre oder Kinematik begnügt sich, die beiden Begriffe Raum und Zeit in Verbindung zu setzen. Die Galilei'sche Vorstellung von der Trägheit liefert einen Zusammenhang zwischen Raum, Zeit und Masse allein. In den Newton'schen Gesetzen der Bewegung treten zuerst alle vier Grundbegriffe neben einander in Verknüpfung auf. Diese Gesetze bilden die eigentliche Wurzel der weiteren Entwickelung, aber sie geben noch keinen allgemeinen Ausdruck für den Einfluſs starrer räumlicher Verbindungen; hier erweitert das d'Alembert'sche Prinzip das

allgemeine Ergebnis der Statik auf den Fall der Bewegung und schliefst als letztes den Reigen der nicht aus einander ableitbaren, unabhängigen Grundaussagen. Alles weitere dagegen ist deduktive Ableitung. In der That sind die aufgezählten Begriffe und Gesetze nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, um den gesamten Inhalt der Mechanik aus ihnen mit Denknotwendigkeit zu entwickeln und alle übrigen sogenannten Prinzipien als Lehrsätze und Folgerungen aus besonderen Voraussetzungen erscheinen zu lassen. Jene aufgezählten Begriffe und Gesetze geben uns also ein erstes System der Prinzipien der Mechanik in unserer Ausdrucksweise; damit zugleich also auch das erste allgemeine Bild von den natürlichen Bewegungen der Körperwelt.

Es erscheint nun von vornherein sehr fernliegend, dafs man an der logischen Zulässigkeit dieses Bildes auch nur zweifeln könne. Es erscheint fast unmöglich, dafs man daran denke, logische Unvollkommenheiten aufzufinden in einem Systeme, welches von unzähligen und von den besten Köpfen immer und immer wieder durchdacht worden ist. Aber ehe man hierauf hin die Untersuchung abbricht, wird man fragen müssen, ob auch alle und ob die besten Köpfe immer von dem Systeme befriedigt gewesen sind. In jedem Falle mufs es billig gleich im Anfang Wunder nehmen, wie leicht es ist, Betrachtungen an die Grundgesetze anzuknüpfen, welche sich ganz in der üblichen Redeweise der Mechanik bewegen und welche doch das klare Denken unzweifelhaft in Verlegenheit setzen. Versuchen wir dies zunächst an einem Beispiele zu zeigen. Wir schwingen einen Stein an einer Schnur im Kreise herum; wir üben dabei bewufstermafsen eine Kraft auf den Stein aus; diese Kraft lenkt den Stein beständig von der geraden Bahn ab, und wenn wir diese Kraft, die Mafse des Steines und die Länge der Schnur verändern, so finden wir, dafs die Bewegung des Steines in der That stets in Übereinstimmung mit dem zweiten Newton'schen Gesetze erfolgt. Nun aber verlangt das dritte Gesetz eine Gegenkraft zu der Kraft, welche von unserer Hand auf den Stein ausgeübt wird. Auf die Frage nach dieser Gegenkraft lautet die jedem geläufige Antwort: es wirke der Stein auf die Hand zurück infolge der

Schwungkraft, und diese Schwungkraft sei der von uns ausgeübten Kraft in der That genau entgegengesetzt gleich. Ist nun diese Ausdrucksweise zulässig? Ist das was wir jetzt Schwungkraft oder Centrifugalkraft nennen, etwas anderes als die Trägheit des Steines? Dürfen wir, ohne die Klarheit unserer Vorstellungen zu zerstören, die Wirkung der Trägheit doppelt in Rechnung stellen, nämlich einmal als Maſse, zweitens als Kraft? In unseren Bewegungsgesetzen war die Kraft die vor der Bewegung vorhandene Ursache der Bewegung. Dürfen wir, ohne unsere Begriffe zu verwirren, jetzt auf einmal von Kräften reden, welche erst durch die Bewegung entstehen, welche eine Folge der Bewegung sind? Dürfen wir uns den Anschein geben, als hätten wir über diese neue Art von Kräften in unseren Gesetzen schon etwas ausgesagt, als könnten wir ihnen mit dem Namen „Kraft“ auch die Eigenschaften der Kräfte verleihen? Alle diese Fragen sind offenbar zu verneinen, es bleibt uns nichts übrig als zu erläutern: die Bezeichnung der Schwungkraft als einer Kraft sei eine uneigentliche, ihr Name sei wie der Name der lebendigen Kraft als eine historische Überlieferung hinzunehmen und die Beibehaltung dieses Namens sei aus Nützlichkeitsgründen mehr zu entschuldigen als zu rechtfertigen. Aber wo bleiben alsdann die Ansprüche des dritten Gesetzes, welches eine Kraft fordert, die der tote Stein auf die Hand ausübt und welches durch eine wirkliche Kraft, nicht durch einen bloſsen Namen befriedigt sein will?

Ich glaube nicht, daſs diese Schwierigkeiten künstlich oder mutwillig heraufbeschworen sind; sie drängen sich uns von selbst auf. Sollte sich nicht ihr Ursprung bis in die Grundgesetze zurückverfolgen lassen? Die Kraft, von welcher die Definition und die ersten beiden Gesetze reden, wirkt auf einen Körper in einseitig bestimmter Richtung. Der Sinn des dritten Gesetzes ist, daſs die Kräfte stets zwei Körper verbinden und ebenso gut vom ersten zum zweiten, wie vom zweiten zum ersten gerichtet sind. Die Vorstellung der Kraft, welche dieses Gesetz und die Vorstellung, welche jene Gesetze voraussetzen und in uns erwecken, scheinen mir um ein Geringes verschieden, dieser geringe Unterschied aber reicht vielleicht aus,

um die logische Trübung zu erzeugen, deren Folgen in unserem Beispiele zum Ausbruch kamen. Doch haben wir nicht nötig, auf die Untersuchung weiterer Beispiele einzugehen. Wir können allgemeine Wahrnehmungen als Zeugen für die Berechtigung unserer Zweifel aufrufen. Eine erste solche Wahrnehmung scheint mir die Erfahrung zu bilden, dafs es sehr schwer ist, gerade die Einleitung in die Mechanik denkenden Zuhörern vorzutragen ohne einige Verlegenheit, ohne das Gefühl, sich hier und da entschuldigen zu müssen, ohne den Wunsch, recht schnell über die Anfänge hinwegzugelangen zu Beispielen, welche für sich selbst reden. Ich meine, Newton selbst müsse diese Verlegenheit empfunden haben, wenn er die Masse etwas gewaltthätig definiert als Produkt aus Volumen und Dichtigkeit. Ich meine, die Herren Thomson und Tait müssen ihm nachempfunden haben, wenn sie anmerken, dies sei eigentlich mehr eine Definition der Dichtigkeit als der Masse, und sich gleichwohl mit derselben als einzigen Definition der Masse begnügen. Auch Lagrange, denke ich, müsse jene Verlegenheit und den Wunsch, um jeden Preis vorwärtszukommen, verspürt haben, als er seine Mechanik kurzerhand mit der Erklärung einleitete, eine Kraft sei eine Ursache, welche einem Körper eine Bewegung erteilt „oder zu erteilen strebt“; gewifs nicht ohne die logische Härte einer solchen Überbestimmung zu empfinden. Ein zweites Zeugnis nehme ich aus der Thatsache, dass wir schon für die elementaren Sätze der Statik, für den Satz vom Parallelogramm der Kräfte, den Satz der virtuellen Geschwindigkeiten, u. s. w. zahlreiche Beweise besitzen, welche von ausgezeichneten Mathematikern herrühren, welche den Anspruch machen, streng zu sein und welche doch wieder nach dem Urteil anderer hervorragender Mathematiker diesem Anspruch keineswegs genügen. In einer logisch vollendeten Wissenschaft, in der reinen Mathematik, ist eine Meinungsverschiedenheit in solcher Frage schlechterdings undenkbar. Als ein sehr belastendes Zeugnis aber erscheinen mir auch die über Gebühr oft gehörten Behauptungen: das Wesen der Kraft sei noch rätselhaft, es sei eine Hauptaufgabe der Physik, das Wesen der Kraft zu erforschen, und ähnliche Aussagen mehr. In gleichem Sinne bestürmt man den Elektriker immer wieder nach dem Wesen

der Elektricität. Warum fragt nun niemand in diesem Sinne nach dem Wesen des Goldes oder nach dem Wesen der Geschwindigkeit? Ist uns das Wesen des Goldes bekannter als das der Elektricität, oder das Wesen der Geschwindigkeit bekannter als das der Kraft? Können wir das Wesen irgend eines Dinges durch unsere Vorstellungen, durch unsere Worte erschöpfend wiedergeben? Gewiſs nicht. Ich meine, der Unterschied sei dieser: Mit den Zeichen „Geschwindigkeit" und „Gold" verbinden wir eine groſse Zahl von Beziehungen zu anderen Zeichen, und zwischen allen diesen Beziehungen finden sich keine uns verletzenden Widersprüche. Das genügt uns und wir fragen nicht weiter. Auf die Zeichen „Kraft" und „Elektricität" aber hat man mehr Beziehungen gehäuft, als sich völlig mit einander vertragen; dies fühlen wir dunkel, verlangen nach Aufklärung und äuſsern unsern unklaren Wunsch in der unklaren Frage nach dem Wesen von Kraft und Elektricität. Aber offenbar irrt die Frage in Bezug auf die Antwort, welche sie erwartet. Nicht durch die Erkenntnis von neuen und mehreren Beziehungen und Verknüpfungen kann sie befriedigt werden, sondern durch die Entfernung der Widersprüche unter den vorhandenen, vielleicht also durch Verminderung der vorhandenen Beziehungen. Sind diese schmerzenden Widersprüche entfernt, so ist zwar nicht die Frage nach dem Wesen beantwortet, aber der nicht mehr gequälte Geist hört auf, die für ihn unberechtigte Frage zu stellen.

Wir haben in diesen Ausführungen die Zulässigkeit des betrachteten Bildes so stark verdächtigt, daſs es scheinen muſs, als sei es unsere Absicht, diese Zulässigkeit zu bestreiten und schlieſslich zu verneinen. Soweit geht indes unsere Absicht und unsere Überzeugung nicht. Mögen die logischen Unbestimmtheiten, welche uns um die Sicherheit der Grundlagen besorgt machten, auch wirklich bestehen, sie haben sicherlich keinen einzigen der zahllosen Erfolge verhindert, welche die Mechanik in ihrer Anwendung auf die Thatsachen errungen hat. Sie können also auch nicht bestehen in Widersprüchen zwischen den wesentlichen Zügen unseres Bildes, also nicht in Widersprüchen zwischen denjenigen Beziehungen der Mechanik, welche Beziehungen der Dinge entsprechen. Sie

müssen sich vielmehr beschränken auf die unwesentlichen Züge, auf alles dasjenige, was wir selbst nach Willkür dem von der Natur gegebenen wesentlichen Inhalte hinzugedichtet haben. Dann aber lassen sich jene Verlegenheiten auch vermeiden. Vielleicht treffen unsere Einwände überhaupt nicht den Inhalt des entworfenen Bildes, sondern nur die Form der Darstellung dieses Inhalts. Wir sind gewiss nicht zu streng, wenn wir meinen, diese Darstellung sei noch niemals zur wissenschaftlichen Vollendung durchgedrungen, es fehle ihr noch durchaus die hinreichend scharfe Unterscheidung dessen, was in dem entworfenen Bilde aus Denknotwendigkeit, was aus der Erfahrung, was aus unserer Willkür stammt. In diesem Urteile treffen wir zusammen mit hervorragenden Physikern, welche sich mit diesen Fragen beschäftigt und über dieselben geäufsert haben,[1]) freilich ohne dafs von einer Übereinstimmung aller gesprochen werden könnte.[2]) Jenes Urteil findet ferner eine Bestätigung in der wachsenden Sorgfalt, welche in den neueren Lehrbüchern der Mechanik der logischen Zergliederung der Elemente gewidmet wird.[3]) In Übereinstimmung mit den Verfassern dieser Lehrbücher und mit jenen Physikern sind wir selbst der Überzeugung, dafs die vorhandenen Lücken nur Lücken der Form sind, und durch geeignete Anordnung der Definitionen, Bezeichnungen und weiter durch vorsichtige Ausdrucksweise jede Unklarheit und Unsicherheit vermieden werden kann. In diesem Sinne geben wir, wie Jedermann, die Zulässigkeit des Inhalts der Mechanik zu. Es erfordert aber die Würde und Grösse des Gegenstandes durchaus, dafs die logische Reinheit nicht nur mit gutem Willen zugegeben, sondern dafs sie durch eine vollendete Darstellung auch so erwiesen werde, dafs es nicht möglich sei, sie auch nur zu verdächtigen.

---

1) Siehe E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwickelung. Leipzig 1883, S. 228. Siehe ferner in der „Nature" von 1893 eine neuerdings von Herrn O. Lodge angeregte und im Schofse der Physical Society in London fortgeführte Diskussion über die Grundgesetze der Mechanik.

2) Siehe Thomson & Tait, Theoretische Physik, § 205 ff.

3) Siehe E. Budde, Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme, Berlin 1890, S. 111—138. Die daselbst gegebene Darstellung giebt zugleich ein deutliches Bild von der Gröfse der Schwierigkeiten, welchen die widerspruchsfreie Anwendung der Elemente begegnet.

Leichter und der allgemeinen Zustimmung sicherer können wir das Urteil fällen über die Richtigkeit des von uns betrachteten Bildes. Niemand wird widersprechen, wenn wir versichern, dafs diese Richtigkeit nach dem ganzen Umfange unserer bisherigen Erfahrung eine vollkommene sei, dafs alle diejenigen Züge unseres Bildes, welche überhaupt den Anspruch machen, beobachtbare Beziehungen der Dinge wiederzugeben, solchen Beziehungen auch wirklich und richtig entsprechen. Wir beschränken allerdings unsere Zuversicht auf den Inhalt der bisherigen Erfahrung; was zukünftige Erfahrungen anlangt, so werden wir noch Gelegenheit haben, auf die Frage nach der Richtigkeit zurückzukommen. Manchem wird freilich diese Vorsicht nicht nur übertrieben, sondern geradezu sinnwidrig dünken; in der Meinung vieler Physiker erscheint es als einfach undenkbar, dafs auch die späteste Erfahrung an den feststehenden Grundsätzen der Mechanik noch etwas zu ändern finden könne. Und doch kann das was aus Erfahrung stammt, durch Erfahrung wieder vernichtet werden; jene allzugünstige Meinung von den Grundgesetzen kann also offenbar nur deshalb entstehen, weil in ihnen die Elemente der Erfahrung einigermafsen versteckt und mit den unabänderlichen denknotwendigen Elementen verschmolzen sind. Die logische Unbestimmtheit der Darstellung, welche wir vorher schlechtweg rügten, bietet also auch einen gewissen Vorteil; sie giebt den Fundamenten den Schein der Unabänderlichkeit; es war vielleicht in den Anfängen der Wissenschaft weise, sie einzuführen und eine zeitlang bestehen zu lassen. Man stellte die Richtigkeit des Bildes auf alle Fälle sicher dadurch, dafs man sich vorbehielt im Notfalle aus einer Erfahrungsthatsache eine Definition zu machen oder umgekehrt. In einer vollendeten Wissenschaft aber ist solches Tasten, ein solcher Schein der Sicherheit nicht erlaubt; in der gereiften Erkenntnis ist die logische Reinheit in erster Linie zu berücksichtigen; nur logisch reine Bilder sind zu prüfen auf ihre Richtigkeit, nur richtige Bilder zu vergleichen nach ihrer Zweckmäfsigkeit. Das dringende Bedürfnis verfährt oft umgekehrt: Die Bilder werden erfunden passend für einen beabsichtigten Zweck, dann geprüft auf ihre Richtigkeit, endlich und zuletzt gesäubert von inneren Widersprüchen.

Ist diese letzte Bemerkung nur einigermafsen zutreffend, so erscheint es uns nur natürlich, dafs das betrachtete System der Mechanik höchste Zweckmäfsigkeit aufweist, sobald es angewandt wird auf die einfachen Erscheinungen, für welche es zuerst erdacht wurde, also vor allem auf die Wirkung der Schwerkraft und die Aufgaben der praktischen Mechanik. Wir dürfen uns aber hierbei nicht beruhigen, wir haben uns zu erinnern, dafs wir hier nicht die Bedürfnisse des täglichen Lebens und nicht den Standpunkt vergangener Zeiten vertreten wollen, dafs wir vielmehr den gesamten Umfang der heutigen physikalischen Erkenntnis ins Auge fassen und dafs wir überdies von der Zweckmäfsigkeit in einem besonderen Sinne reden, welchen wir im Eingange genau bestimmt haben. Darnach haben wir die Pflicht, zunächst zu fragen: Ist das entworfene Bild vollkommen deutlich? Enthält es alle Züge, welche die heutige Erkenntnis an den natürlichen Bewegungen zu unterscheiden vermag? Diese Frage beantworten wir nun entschieden mit nein. Nicht alle Bewegungen, welche die Grundgesetze zulassen und welche die Mechanik als mathematische Übungsaufgaben behandelt, kommen in der Natur vor; wir können von den natürlichen Bewegungen, Kräften, festen Verbindungen mehr aussagen, als es die angenommenen Grundgesetze thun. Seit der Mitte dieses Jahrhunderts sind wir fest überzeugt, dafs keine Kräfte in der Natur wirklich vorkommen, welche eine Verletzung des Prinzips von der Erhaltung der Energie bedingen würden. Weit älter ist die Überzeugung, dafs nur solche Kräfte vorkommen, welche sich darstellen lassen als Summe von Wechselwirkungen zwischen unendlich kleinen Elementen der Materie. Auch diese Elementarkräfte sind nicht frei. Als allgemein zugegebene Eigenschaften derselben können wir anführen, dass sie unabhängig sind vom absoluten Werte der Zeit und vom absoluten Orte im Raume. Andere Eigenschaften sind umstritten. Man hat bald vermutet, bald in Frage gestellt, ob die Elementarkräfte nur bestehen können in Anziehungen und Abstofsungen nach der Verbindungslinie der wirkenden Massen; ob ihre Gröfse nur bedingt sei durch die Entfernung oder ob sie nicht auch abhängen könne von der absoluten oder der relativen Geschwindigkeit und nur von dieser, oder ob nicht auch die Be-

schleunigung oder noch höhere Differentialquotienten des Wegs nach der Zeit in Betracht kommen könnten. So wenig man sich also einig ist über alle bestimmten Eigenschaften, welche den Elementarkräften beizulegen sind, so sehr stimmt man doch überein in der Meinung, dafs sich mehr solche allgemeine Eigenschaften angeben und aus der schon vorhandenen Beobachtung ableiten lassen, als die Grundgesetze enthalten. Man ist überzeugt, dafs die Elementarkräfte, unbestimmt gesprochen, einfacher Natur sein müssen. Was in dieser Hinsicht von den Kräften gilt, kann man in gleicher Weise von den festen Verbindungen der Körper sagen, welche mathematisch durch Bedingungsgleichungen zwischen den Koordinaten dargestellt werden und deren Einflufs durch das d'Alembertsche Prinzip bestimmt ist. Mathematisch kann man jede beliebige endliche oder Differentialgleichung zwischen den Koordinaten hinschreiben und verlangen, dafs sie befriedigt werde; aber nicht immer läfst sich eine physikalische, eine natürliche Verbindung angeben, welche die Wirkung jener Gleichung hat; oft liegt die Vermutung, bisweilen die Überzeugung vor, dafs eine solche Verbindung durch die Natur der Dinge ausgeschlossen sei. In welcher Weise aber sind die zulässigen Bedingungsgleichungen einzuschränken? Wo ist die Grenzlinie zwischen ihnen und den vorstellbaren? Man hat sich häufig begnügt, nur endliche Bedingungsgleichungen in Betracht zu ziehen. Diese Einschränkung aber geht zu weit, denn nicht integrierbare Differentialgleichungen können als Bedingungsgleichungen bei natürlichen Problemen wirklich auftreten.

Kurzum, sowohl was die Kräfte, als was die festen Verbindungen anlangt, enthält unser System der Prinzipien zwar alle die natürlichen Bewegungen, aber es umfängt gleichzeitig sehr viele Bewegungen, welche nicht natürliche sind. Ein System, welches diese letzteren oder doch einen Teil derselben ausschlösse, würde mehr wirkliche Beziehungen der Dinge zu einander wiederspiegeln und also in diesem Sinne zweckmäfsiger sein. Doch haben wir die Pflicht, auch noch in einer zweiten Richtung nach der Zweckmäfsigkeit unseres Bildes zu fragen. Ist unser Bild auch einfach? Ist es sparsam an unwesentlichen Zügen, an Zügen also, welche von uns zwar zulässiger

aber doch willkürlicher Weise den wesentlichen Zügen der Natur hinzugefügt werden? Unsere Bedenken bei Beantwortung dieser Frage knüpfen sich wiederum an den Begriff der Kraft. Es kann nicht geleugnet werden, dafs in sehr vielen Fällen die Kräfte, welche unsere Mechanik zur Behandlung physikalischer Fragen einführt, nur als leergehende Nebenräder mitlaufen, um überall da aufser Wirksamkeit zu treten, wo es gilt, wirkliche Thatsachen darzustellen. In den einfachen Verhältnissen, an welche die Mechanik ursprünglich anknüpfte, ist das freilich nicht der Fall. Die Schwere eines Steines, die Kraft des Armes scheinen ebenso wirklich, ebenso der unmittelbaren Wahrnehmung zugänglich, wie die durch sie erzeugten Bewegungen. Aber wir brauchen nur etwa zur Bewegung der Gestirne überzugehen, um schon andere Verhältnisse zu haben. Hier sind die Kräfte niemals Gegenstand der unmittelbaren Erfahrung gewesen; alle unsere früheren Erfahrungen beziehen sich nur auf den scheinbaren Ort der Gestirne. Wir erwarten auch in Zukunft nicht die Kräfte wahrzunehmen, sondern die zukünftigen Erfahrungen, welche wir erwarten, betreffen wiederum nur die Lage der leuchtenden Punkte am Himmel, als welche uns die Gestirne erscheinen. Nur bei der Ableitung der zukünftigen Erfahrungen aus den vergangenen treten als Hülfsgröfsen vorübergehend die Gravitationskräfte ein, um wieder aus der Überlegung zu verschwinden. Ganz allgemein liegt die Sache so bei der Betrachtung der molekularen Kräfte, der chemischen, vieler elektrischen und magnetischen Wirkungen. Und wenn wir nun nach reiferer Erfahrung zurückkehren zu den einfachen Kräften, über deren Bestehen wir keinen Zweifel hatten, so werden wir belehrt, dafs diese mit überzeugender Gewifsheit von uns wahrgenommenen Kräfte jedenfalls nicht wirkliche waren. Der Trieb jedes Körpers gegen die Erde hin, welchen wir mit Händen zu greifen glaubten, dieser Trieb, so sagt uns die reifere Mechanik, ist als solcher nicht wirklich, er ist das als Einzelkraft nur vorgestellte Ergebnis einer unfafsbaren Anzahl wirklicher Kräfte, welche die Atome des Körpers gegen alle Atome des Weltalls hinziehen. Auch hier sind dann also die wirklichen Kräfte niemals Gegenstand der früheren Erfahrung gewesen, noch erwarten wir sie in zukünftigen Erfahrungen anzutreffen. Nur

während des Prozesses, mit welchem wir die zukünftigen Erfahrungen aus den vergangenen ableiten, treten sie leise ein und wieder aus. Doch selbst wenn die Kräfte nur von uns in die Natur hineingetragen wären, dürften wir darum ihre Einführung noch nicht als unzweckmäfsig bezeichnen. Wir waren uns von vornherein klar darüber, dafs sich unwesentliche Nebenbeziehungen in unsern Bildern nicht ganz würden vermeiden lassen. Nur möglichste Einschränkung dieser Beziehungen, nur weise Besonnenheit in ihrem Gebrauch durften wir verlangen. Kann man aber behaupten, dafs die Physik in dieser Richtung immer mit Sparsamkeit zu Wege gehen konnte? Mufste sie nicht vielmehr die Welt bis zum Übermafs erfüllen mit den verschiedensten Arten von Kräften, mit Kräften, welche selbst niemals in die Erscheinung treten, sogar mit solchen, welche nur ganz ausnahmsweise überhaupt eine Wirkung haben? Wir sehen etwa ein Stük Eisen auf dem Tische ruhen, wir vermuten demnach, dafs keine Bewegungsursachen, keine Kräfte daseien. Die Physik, welche auf unserer Mechanik aufgebaut und durch dies Fundament notwendig bestimmt ist, belehrt uns eines anderen. Jedes Atom des Eisens wird zu jedem anderen Atom des Weltalls durch die Gravitationskraft hingezogen. Jedes Atom des Eisens ist aber auch magnetisch und dadurch mit jedem anderen magnetischen Atom des Weltalls durch neue Kräfte verbunden. Aber die Körper des Alls sind auch erfüllt mit bewegter Elektricität und von diesen bewegten Elektricitäten gehen weitere verwickelte Kräfte aus, welche an jedem magnetischen Atom des Eisens ziehen. Und insofern die Teile des Eisens selbst Elektricität enthalten, haben wir wieder andere Kräfte in Betracht zu ziehen; neben diesen dann noch verschiedene Arten von Molekularkräften. Einige dieser Kräfte sind nicht klein; wäre von allen Kräften nur ein Teil wirksam, so könnte dieser Teil das Eisen in Stücke reifsen. In Wahrheit aber sind alle Kräfte so gegen einander abgeglichen, dafs die Wirkung der gewaltigen Zurüstung Null ist; dafs trotz tausend vorhandenen Bewegungsursachen Bewegung nicht eintritt; dafs das Eisen eben ruht. Wenn wir nun diese Vorstellungen unbefangen Denkenden vortragen, wer wird uns glauben? Wen werden wir überzeugen, dafs wir noch von wirklichen Dingen reden und

nicht von Gebilden einer ausschweifenden Einbildungskraft? Wir selbst aber werden nachdenklich werden, ob wir wirklich die Ruhe des Eisens und seiner Teile in einfacher Weise geschildert und abgebildet haben. Ob sich die Verwickelung überhaupt vermeiden läfst, ist zunächst ja fraglich; aber das ist nicht fraglich, dafs ein System der Mechanik, welches sie vermeidet oder ausschliefst, einfacher und in diesem Sinne zweckmäfsiger ist, als das hier betrachtete, welches solche Vorstellungen nicht nur zuläfst, sondern uns geradezu aufzwingt.

Fassen wir noch einmal in kürzester Form die Bedenken zusammen, welche uns bei Betrachtung der gewöhnlichen Darstellungsweise der Prinzipien der Mechanik aufstiefsen. Was die Form anlangt, schien uns, dafs der logische Wert der einzelnen Aussagen nicht hinreichend klar festgelegt worden sei. Was die Sache anlangt, schien uns, dafs die von der Mechanik betrachteten Bewegungen sich nicht völlig mit den zu betrachtenden natürlichen Bewegungen decken. Manche Eigenschaften der natürlichen Bewegungen werden in der Mechanik nicht berücksichtigt; viele Beziehungen, welche die Mechanik betrachtet, fehlen wahrscheinlich in der Natur. Auch wenn diese Ausstellungen als gerechtfertigt anerkannt werden, dürfen sie uns freilich nicht zu der Meinung verleiten, dafs die gewöhnliche Darstellung der Mechanik ihren Wert und ihre bevorzugte Stellung deshalb einbüfsen müsse oder je einbüfsen werde; aber sie rechtfertigen es doch hinreichend, dafs wir uns auch nach anderen Darstellungen umsehen, welche in den getadelten Beziehungen Vorteile bieten und den darzustellenden Dingen noch enger angepafst sind.

2.

Ein zweites Bild der mechanischen Vorgänge ist weit jüngeren Ursprungs als das erste. Seine Entwickelung aus und neben jenem ist eng verknüpft mit den Fortschritten,

welche die physikalische Wissenschaft in den letzten Jahrzehnten gemacht hat. Noch bis in die Mitte des Jahrhunderts erschien als letztes Ziel und als letzte anzustrebende Erklärung der Naturerscheinungen die Rückführung derselben auf unzählige Fernkräfte zwischen den Atomen der Materie. Diese Anschauungsweise entsprach vollständig dem Systeme der mechanischen Prinzipien, welches wir als das erste bezeichnet haben; sie wurde durch jenes bedingt, wie jenes durch sie. Jetzt, gegen Ende des Jahrhunderts hat die Physik einer anderen Denkweise ihre Vorliebe zugewandt. Beeinflufst von dem überwältigenden Eindrucke, welchen die Auffindung des Prinzipes von der Erhaltung der Energie ihr gemacht hat, liebt sie es, die in ihr Gebiet fallenden Erscheinungen als Umsetzungen der Energie in neue Formen zu behandeln, und die Rückführung der Erscheinungen auf die Gesetze der Energieverwandlung als ihr letztes Ziel zu betrachten. Diese Behandlungsart kann auch schon von vornherein auf die elementaren Vorgänge der Bewegung selbst angewandt werden; alsdann entsteht eine neue, von der ersten verschiedene Darstellung der Mechanik, in welcher von Anfang an der Begriff der Kraft zurücktritt zu Gunsten des Begriffs der Energie. Eben dieses so entstandene neue Bild der elementaren Bewegungsvorgänge ist es, welches wir als das zweite bezeichnen und welchem wir jetzt unsere Aufmerksamkeit widmen wollen. Wenn wir bei Besprechung des ersten Bildes den Vorteil hatten, dafs wir das Bild selbst als deutlich vor dem Auge aller Physiker stehend voraussetzen konnten, so ist das bei diesem zweiten Bilde nun freilich nicht der Fall. Dasselbe ist sogar wohl noch niemals in allen seinen Einzelheiten ausgemalt worden, es giebt meines Wissens kein Lehrbuch der Mechanik, welches sich von vornherein auf den Standpunkt der Energielehre stellte, und den Begriff der Energie vor dem Begriff der Kraft einführte. Vielleicht ist auch noch niemals eine Vorlesung über Mechanik nach diesem Plane eingerichtet worden. Aber die Möglichkeit eines solchen Planes hat schon den Begründern der Energielehre eingeleuchtet; die Bemerkung, dafs man auf diese Weise den Begriff der Kraft mit seinen Schwierigkeiten vermeiden könne, ist öfters gemacht; in einzelnen besonderen

Anwendungen treten in der Wissenschaft immer häufiger Schlussreihen auf, welche ganz dieser Denkweise angehören. Wir können daher recht wohl eine Skizze entwerfen, welche uns die groben Umrisse des Bildes vorführt; wir können im allgemeinen den Plan angeben, nach welchem die beabsichtigte Darstellung der Mechanik geordnet werden müfste. Wie im ersten Bilde, so gehen wir auch hier aus von vier von einander unabhängigen Grundbegriffen, deren Beziehungen zu einander den Inhalt der Mechanik bilden sollen. Zwei derselben haben einen mathematischen Charakter: Raum und Zeit; die beiden anderen: Masse und Energie, werden eingeführt als in gegebener Menge vorhandene, unzerstörbare und unvermehrbare physikalische Wesenheiten. Freilich wird es nötig sein, neben dieser Erklärung auch deutlich anzugeben, durch welche konkreten Erfahrungen wir in letzter Instanz das Vorhandensein von Masse und Energie feststellen wollen. Hier nehmen wir an, dass dies möglich und dass es geschehen sei. Dass die Menge der Energie, welche mit bestimmten Massen verbunden ist, von dem Zustande dieser Massen abhängig ist, ist selbstverständlich. Es ist aber als eine erste allgemeine Erfahrung einzuführen, dafs die vorhandene Energie sich stets in zwei Teile zerfällen läfst, von welchen der eine allein durch die gegenseitige Lage der Massen bedingt ist, der andere aber von ihrer absoluten Geschwindigkeit abhängt. Der erste Teil wird als potentielle Energie, der zweite Teil als kinetische Energie definiert. Die Form für die Abhängigkeit der kinetischen Energie von der Geschwindigkeit der bewegten Körper ist in allen Fällen die gleiche und bekannt; die Form für die Abhängigkeit der potentiellen Energie von der Lage der Körper kann nicht allgemein angegeben werden, sie bildet vielmehr die besondere Natur und die charakteristische Eigentümlichkeit der gerade betrachteten Massen. Es ist die Aufgabe der Physik, diese Form für die uns umgebenden Naturkörper aus früheren Erfahrungen zu ermitteln. Bis hierher treten in den Betrachtungen im wesentlichen nur drei Elemente, nämlich Raum, Masse und Energie in Beziehung. Um die Beziehungen aller vier Grundbegriffe und damit den zeitlichen Ablauf der Erscheinungen festzulegen, bedienen wir uns eines der Integralprinzipien der gewöhnlichen Mechanik, welche sich zu ihren

Aussagen des Energiebegriffs bedienen. Welches derselben wir anwenden, ist ziemlich gleichgültig; wir können und wir wollen etwa das HAMILTON'sche Princip wählen. Wir würden dann also als einziges erfahrungsmäſsiges Grundgesetz der Mechanik den Satz aufstellen, daſs jedes System natürlicher Massen sich so bewegt, als sei ihm die Aufgabe gestellt, gegebene Lagen in gegebener Zeit zu erreichen und zwar in solcher Weise, daſs die Differenz zwischen kinetischer und potentieller Energie im Mittel über die ganze Zeit so klein ausfalle wie möglich. Ist dieses Gesetz auch in der Form nicht einfach, so giebt es doch durch eine einzige Bestimmung die natürlichen Umwandlungen der Energie zwischen ihren Formen in eindeutiger Weise wieder, es gestattet daher den Ablauf der wirklichen Erscheinungen für die Zukunft vollständig vorauszubestimmen. Mit der Aufstellung dieses neuen Gesetzes sind die unentbehrlichen Grundlagen der Mechanik abgeschlossen. Was wir noch hinzufügen können, sind nur mathematische Ableitungen und etwa Vereinfachungen oder Hilfsbezeichnungen, welche vielleicht zweckmäſsig, aber jedenfalls nicht notwendig sind. Zu diesen letzteren gehört dann auch der Begriff der Kraft, welcher in den Grundlagen selbst nicht auftrat. Seine Einführung ist zweckmäſsig, sobald wir nicht nur Massen in Betracht ziehen, welche mit konstanten Mengen von Energie verbunden sind, sondern auch solche Massen, welche Energie an andere Massen abgeben oder von ihnen empfangen. Aber die Einführung geschieht nicht durch neue Erfahrung, sondern durch eine Definition, welche in mehr als einer Weise gefaſst werden kann. Dementsprechend sind auch die Eigenschaften der so definierten Kräfte nicht aus der Erfahrung zu ermitteln, sondern lassen sich aus der Definition und dem Grundgesetz ableiten und selbst die Bestätigung dieser Eigenschaften durch die Erfahrung ist überflüssig, es wäre denn, daſs man noch an der Richtigkeit des ganzen Systems zweifelte. Der Kraftbegriff als solcher kann also in diesem System keine logischen Schwierigkeiten mehr bereiten; auch für die Beurteilung der Richtigkeit des Systems kann er nicht in Frage kommen, nur auf die gröſsere oder kleinere Zweckmäſsigkeit desselben kann er Einfluſs haben.

In der angedeuteten Weise also hätten wir etwa die Prinzipien der Mechanik zu ordnen, um sie der Anschauungsweise der Energielehre anzupassen. Es fragt sich nun aber, ob das entstandene zweite Bild vor dem erstbetrachteten etwas voraus habe, und wir wollen deshalb seine Vorzüge und Nachteile näher ins Auge fassen.

Diesmal liegt es in unserem Interesse, dafs wir uns zuerst an die Zweckmäfsigkeit halten, weil in Bezug auf diese ein Fortschritt am unzweifelhaftesten hervortritt. Denn unser zweites Bild der natürlichen Bewegungen ist zunächst entschieden deutlicher; es giebt mehr Eigentümlichkeiten derselben wieder als das erste. Wenn wir das Hamilton'sche Prinzip aus den allgemeinen Grundlagen der Mechanik ableiten wollen, müssen wir den letzteren gewisse Voraussetzungen über die wirkenden Kräfte und über die Beschaffenheit etwaiger fester Verbindungen hinzufügen. Diese Voraussetzungen sind höchst allgemeiner Art, aber sie bedeuten darum doch ebenso viele wichtige Einschränkungen der durch das Prinzip dargestellten Bewegungen. Und umgekehrt lassen sich daher auch aus dem Prinzip eine ganze Reihe von Beziehungen, insbesondere von Wechselbeziehungen zwischen jeder Art von möglichen Kräften ableiten, welche in den Prinzipien des ersten Bildes fehlen, welche aber in dem zweiten Bilde, und gleichzeitig, worauf es ankommt, in der Natur sich finden. Der Nachweis, dafs dem so sei, bildet den eigentlichen Inhalt und das Ziel der Arbeiten, welche von Helmholtz unter dem Titel: „Über die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung" veröffentlicht hat. Wir treffen aber die Sachlage wohl genauer, wenn wir sagen, die Thatsache selbst, welche bewiesen werden soll, bilde die Entdeckung, welche in jener Arbeit mitgeteilt und dargelegt wird. Denn einer Entdeckung bedurfte in der That die Erkenntnis, dafs aus so allgemeinen Voraussetzungen sich so besondere, wichtige und zutreffende Folgerungen ziehen lassen. Auf jene Abhandlung können wir uns daher auch berufen zur Erhärtung unserer Behauptung im einzelnen, und insofern jene Abhandlung zur Zeit den äufsersten Fortschritt der Physik bezeichnet, können wir uns der Frage überhoben halten, ob ein noch engerer Anschlufs an die Natur

erreichbar sei, etwa durch Einschränkung der für die potentielle Energie zulässigen Formen. Lieber wollen wir betonen, daſs unser jetziges Bild auch in Hinsicht der Einfachheit die Klippen vermeidet, an welchen die Zweckmäſsigkeit unseres ersten Bildes sich gefährdet fand. Denn fragen wir nach dem eigentlichen Grunde, aus welchem die Physik es heutzutage liebt, ihre Betrachtungen in der Ausdrucksweise der Energielehre zu halten, so dürfen wir antworten: weil sie es auf diese Weise am besten vermeidet, von Dingen zu reden, von welchen sie sehr wenig weiſs und welche auf die wesentlich beabsichtigten Aussagen auch keinen Einfluſs haben. Wir bemerkten schon gelegentlich, daſs die Rückführung der Erscheinungen auf die Kraft uns zwingt, unsere Überlegung beständig an die Betrachtung der einzelnen Atome und Moleküle anzuknüpfen. Nun sind wir ja allerdings gegenwärtig überzeugt davon, daſs die wägbare Materie aus Atomen besteht; auch haben wir von der Gröſse dieser Atome und ihren Bewegungen in gewissen Fällen einigermaſsen bestimmte Vorstellungen. Aber die Gestalt der Atome, ihr Zusammenhang, ihre Bewegungen in den meisten Fällen, alles dies ist uns gänzlich verborgen; ihre Zahl ist in allen Fällen unübersehbar groſs. Unsere Vorstellung von den Atomen ist daher selbst ein wichtiges und interessantes Ziel weiterer Forschung, keineswegs aber ist sie besonders geeignet, als bekannte und gesicherte Grundlage mathematischer Theorieen zu dienen. Einen so streng denkenden Forscher, wie es Gustav Kirchhoff war, berührte es daher fast peinlich, die Atome und ihre Schwingungen ohne zwingende Notwendigkeit in den Mittelpunkt einer theoretischen Ableitung gestellt zu sehen. Die willkürlich angenommenen Eigenschaften der Atome mögen ohne Einfluſs auf das Endresultat sein, das letztere mag richtig sein. Gleichwohl sind die Einzelheiten der Ableitung selbst zum groſsen Teile mutmaſslich falsch, die Ableitung ist ein Scheinbeweis. Die ältere Denkweise der Physik läſst hier kaum eine Wahl, einen Ausweg zu. Dagegen bietet die Auffassung der Energielehre und damit unser zweites Bild der Mechanik den Vorteil, daſs in die Voraussetzungen der Probleme nur die der Erfahrung unmittelbar zugänglichen Merkmale, Parameter, oder willkürlichen Koordinaten der betrachteten Körper eintreten; daſs die Be-

trachtungen mit Hülfe dieser Merkmale in endlicher und geschlossener Form fortschreiten und dafs auch das Endresultat unmittelbar wieder in greifbare Erfahrung kann übersetzt werden. Aufser der Energie selbst in ihren wenigen Formen treten keine Hilfskonstruktionen in die Betrachtung ein. Unsere Aussagen können sich auf die bekannten Eigentümlichkeiten der betrachteten Körpersysteme beschränken, ohne dafs wir unsere Unkenntnis der Einzelheiten durch willkürliche und einflufslose Hypothesen verdecken müfsten. Nicht nur das Endresultat, sondern auch alle Schritte der Ableitung desselben können als richtig und sinnvoll vertreten werden. Dies sind die Vorzüge, welche diese Methode der heutigen Physik lieb gemacht haben, welche also auch unserem zweiten Bilde der Mechanik eigen sind, und welche wir in unserer Bezeichnungsweise als Vorzüge der Einfachheit, also der Zweckmäfsigkeit aufzufassen haben.

Leider werden wir wieder unsicherer über den Wert unseres Systems, wenn wir seine Richtigkeit und seine logische Zulässigkeit prüfen. Schon die Frage nach der Richtigkeit giebt zu gerechtfertigten Zweifeln Anlafs. Keineswegs dürfen wir der Übereinstimmung mit der Natur schon deshalb sicher sein, weil sich das Hamilton'sche Prinzip ja auch aus den zugegebenen Grundlagen der Newton'schen Mechanik ableiten läfst. Wir haben zu bedenken, dafs diese Ableitung nur dann stattfindet, wenn gewisse Voraussetzungen zutreffen, und dafs anderseits unser System nicht nur den Anspruch macht, einige Bewegungen der Natur richtig zu beschreiben, sondern dafs es behauptet, alle Bewegungen der Natur zu umfassen. Wir haben also zu untersuchen, ob auch wirklich neben den Newton'schen Gesetzen jene besondern Voraussetzungen Allgemeingültigkeit haben, und ein einziges Beispiel der Natur, welches widerspräche, würde die Richtigkeit des Systems als solches umwerfen, wenn es auch die Gültigkeit des Hamilton-schen Prinzips als allgemeinen Lehrsatzes nicht im mindesten erschütterte. Hier entsteht nun das Bedenken nicht sowohl ob unser Bild die gesamte Mannigfaltigkeit der Kräfte, sondern ob es auch wirklich die gesamte Mannigfaltigkeit der starren Verbindungen enthielte, welche zwischen den Körpern der Natur auftreten können. Die Anwendung des Hamilton'schen

Prinzips auf ein materielles System schliesst nicht aus, dafs zwischen den gewählten Koordinaten desselben feste Zusammenhänge bestehen, aber es verlangt immerhin, dafs diese Zusammenhänge sich mathematisch ausdrücken lassen durch endliche Gleichungen zwischen den Koordinaten; es gestattet nicht das Auftreten solcher Zusammenhänge, welche mathematisch nur durch Differentialgleichungen wiedergegeben werden können. Die Natur selbst aber scheint Zusammenhänge der letzteren Art nicht einfach auszuschliessen. Denn dieselben treten zum Beispiel auf, sobald dreidimensionale Körper mit ihren Oberflächen ohne Gleitung auf einander rollen. Durch diese Verbindung, welche wir in unserer Umgebung oft vorfinden, ist die Lage beider Körper zu einander nur insofern beschränkt, als sie stets einen Punkt der Oberfläche gemein haben müssen; die Bewegungsfreiheit der Körper aber ist noch um einen Grad weiter beschränkt. Es lassen sich also aus der Verbindung mehr Gleichungen zwischen den Änderungen der Koordinaten herleiten als zwischen den Koordinaten selbst, unter jenen muss daher mindestens eine sein, welche mathematisch als eine nicht integrabele Differentialgleichung zu bezeichnen ist. Auf derartige Fälle nun gestattet das Hamilton'sche Prinzip keine Anwendung mehr, oder genau gesprochen: Die mathematisch mögliche Anwendung des Prinzips führt zu physikalisch falschen Resultaten. Man beschränke die Betrachtung auf den einfachen Fall einer Kugel, welche allein ihrer Trägheit folgend auf einer festen horizontalen Ebene ohne Gleitung rollt; man kann hier ganz wohl durch blofse Betrachtung ohne Rechnung sowohl die Bewegungen übersehen, welche die Kugel wirklich ausführen kann, als auch die Bewegungen, welche dem Hamilton'schen Prinzip entsprechen würden und welche so ausfallen müfsten, dafs die Kugel bei konstanter lebendiger Kraft gegebene Ziele in kürzester Zeit erreicht. Man kann sich daher auch ohne Rechnung überzeugen, dafs beide Arten von Bewegungen sehr verschiedene Eigentümlichkeiten aufweisen. Wählen wir Anfangs- und Endlage der Kugel beliebig aus, so giebt es doch offenbar stets einen bestimmten Übergang aus einer zur andern, auf welchem die Zeit des Übergangs, also das Hamilton'sche Integral ein Minimum wird. In Wahrheit ist aber gar nicht

aus jeder Lage in jede andere ohne die Mitwirkung von Kräften ein natürlicher Übergang möglich, wenn auch die Wahl der Anfangsgeschwindigkeit vollkommen frei steht. Aber selbst dann, wenn wir Anfangs- und Endlage so wählen, dafs eine natürliche freie Bewegung zwischen beiden möglich ist, so ist dies gleichwohl nicht diejenige, welche dem Minimum der Zeit entspricht. Bei gewissen Anfangs- und Endlagen kann der Unterschied sehr auffallend sein. In diesem Falle würde eine Kugel, welche dem Prinzip gemäfs sich bewegte, entschieden den Schein eines belebten Wesens annehmen, welches zielbewufst einer bestimmten Lage zusteuert, während neben ihr die Kugel, welche dem Gesetze der Natur folgt, den Eindruck einer toten, gleichförmig dahinkreiselnden Masse hervorrufen würde. Es würde nichts helfen, wollten wir an Stelle des Hamilton'schen Prinzips das Prinzip der kleinsten Wirkungen oder ein anderes Integralprinzip in den Vordergrund rücken, da alle diese Prinzipien nur einen geringen Unterschied der Bedeutung aufweisen und sich in der hier betrachteten Hinsicht ganz gleich verhalten. Übrigens ist der Weg vorgezeichnet, auf welchem allein wir das System verteidigen und gegen den Vorwurf der Unrichtigkeit in Schutz nehmen können. Wir haben zu leugnen, dafs starre Verbindungen der angeführten Art mit Strenge in der Natur wirklich vorkommen. Wir haben auszuführen, dafs jedes sogenannte Rollen ohne Gleitung in Wahrheit ein Rollen mit geringer Gleitung, also ein Vorgang der Reibung sei. Wir haben uns darauf zu berufen, dafs ganz allgemein die Vorgänge in reibenden Flächen zu denjenigen gehören, welche noch nicht auf klar verstandene Ursachen zurückgeführt werden können, sondern für welche nur gerade empirisch die erzeugten Kräfte ermittelt sind; daher gehöre das ganze Problem zu denjenigen, zu deren Behandlung zur Zeit die Benützung der Kräfte und damit der Umweg über die gewöhnlichen Methoden der Mechanik noch nicht vermieden werden könne. Überzeugend wirkt freilich diese Verteidigung nicht. Denn ein Rollen ohne Gleiten widerspricht weder dem Energieprinzipe noch einem anderen allgemein anerkannten Grundsatze der Physik; der Vorgang ist in der sichtbaren Welt mit so grofser Annäherung verwirklicht, dafs man sogar Integrationsmaschinen auf die Voraussetzung seines

genauen Eintretens gegründet hat; wir haben daher kaum ein Recht, sein Vorkommen als unmöglich auszuschliefsen, am wenigsten aus der Mechanik noch unbekannter Systeme, wie es die Atome oder die Teile des Äthers sind. Aber selbst wenn wir zugeben, dass die fraglichen Verbindungen in der Natur nur angenähert verwirklicht sind, selbst dann bereitet uns das Versagen des HAMILTON'schen Prinzips in diesen Fällen Schwierigkeiten. Von jedem Grundgesetze unseres mechanischen Systems werden wir verlangen müssen, dafs es angewandt auf angenähert richtige Verhältnisse immer noch angenähert richtige Resultate gebe, nicht aber gänzlich falsche. Denn da schliesslich alle starren Zusammenhänge, welche wir der Natur entnehmen und in die Rechnung einführen, den wirklichen Verhältnissen nur angenähert entsprechen, so geraten wir sonst in gänzliche Unsicherheit, auf welche unter ihnen wir das Gesetz überhaupt noch anwenden dürfen, auf welche nicht mehr. Doch wollen wir die vorgetragene Verteidigung auch nicht gänzlich verwerfen; wir wollen entgegenkommend zugeben, dafs die aufgeworfenen Zweifel nur die Zweckmäfsigkeit des Systems, nicht aber seine Richtigkeit betreffen, so dafs die aus ihnen entspringenden Nachteile durch andere Vorteile aufgewogen werden können.

Die wahren Schwierigkeiten erwarten uns nun aber erst, sobald wir versuchen, die Grundlagen des Systems so zu ordnen, dafs den Anforderungen der logischen Zulässigkeit mit aller Strenge genügt werde. Wir dürfen bei der Einführung der Energie nicht dem gewöhnlichen Wege folgend von den Kräften ausgehen, von diesen zur Kräftefunktion, zur potentiellen Energie, zur Energie überhaupt fortschreiten. Eine solche Anordnung würde der ersten Darstellung der Mechanik angehören. Vielmehr haben wir, ohne eigentlich mechanische Entwickelungen schon vorauszusetzen, diejenigen einfachen unmittelbaren Erfahrungen anzugeben, durch welche wir allgemein das Vorhandensein eines Vorrats von Energie und die Bestimmung seiner Menge definiert wissen wollen. Wir haben oben nur angenommen, nicht aber bewiesen, dafs eine solche Bestimmung möglich sei. Mehrere ausgezeichnete Physiker versuchen heutzutage, der Energie so sehr die Eigen-

schaften der Substanz zu leihen, dafs sie annehmen, jede kleinste Menge derselben sei zu jeder Zeit an einen bestimmten Ort des Raumes geknüpft und bewahre bei allem Wechsel desselben und bei aller Verwandlung der Energie in neue Formen dennoch ihre Identität. Diese Physiker müssen notwendig die Überzeugung vertreten, dafs sich Definitionen der verlangten Art wirklich geben lassen, und es war daher wohl erlaubt, die Möglichkeit derselben anzunehmen. Sollen wir selbst aber eine konkrete Form dafür aufweisen, welche uns genügt und welche allgemeiner Zustimmung sicher ist, so geraten wir in Verlegenheit; zu einem befriedigenden und abschliefsenden Ergebnis scheint diese ganze Anschauungsweise noch nicht gelangt. Eine besondere Schwierigkeit mufs auch von vornherein der Umstand bereiten, dafs die angeblich substanzartige Energie in zwei so gänzlich verschiedenen Formen auftritt, wie es die kinetische und die potentielle Form sind. Die kinetische Energie bedarf im Grunde an sich keiner neuen Grundbestimmung, da sie aus den Begriffen der Geschwindigkeit und der Masse abgeleitet werden kann; die potentielle Energie hingegen, welche eine selbständige Feststellung fordert, widerstrebt zugleich jeder Definition, welche ihr die Eigenschaften einer Substanz beilegt. Die Menge einer Substanz ist eine notwendig positive Grösse; die in einem System enthaltene potentielle Energie scheuen wir uns nicht, als negativ anzunehmen. Bedeutet ein analytischer Ausdruck die Menge einer Substanz, so hat eine additive Konstante in dem Ausdruck dieselbe Wichtigkeit wie der Rest; in dem Ausdruck für die potentielle Energie eines Systems hat eine additive Konstante niemals eine Bedeutung. Endlich kann der Inhalt eines physikalischen Systems an einer Substanz nur abhängen von dem Zustande des Systems selbst, der Inhalt gegebener Materie an potentieller Energie aber hängt ab von dem Vorhandensein entfernter Massen, welche vielleicht niemals Einflufs auf das System hatten. Ist das Weltall und damit die Menge jener entfernten Massen unendlich, so wird der Inhalt auch endlicher Mengen von Materie an vielen Formen potentieller Energie unendlich gross. Dies sind alles Schwierigkeiten, welche durch die gesuchte Definition der Energie beseitigt oder umgangen werden müfsten. Obwohl

wir nun auch nicht behaupten wollen, dafs eine solche Umgehung unmöglich sei, so können wir sie doch gegenwärtig noch nicht als geleistet ansehen, und es wird am vorsichtigsten sein, wenn wir es einstweilen noch als eine offene Frage betrachten, ob sich das System überhaupt in logisch einwurfsfreier Form entwickeln läfst.

Es ist vielleicht der Mühe wert, an dieser Stelle auch die Frage zu erörtern, ob ein anderer Einwurf gerechtfertigt sei, den man vielleicht gegen die Zulässigkeit des hier betrachteten Systems richten könnte. Soll ein Bild gewisser äufserer Dinge in unserem Sinne zulässig sein, so müssen die Züge desselben nicht allein unter sich in Einklang stehen, sondern sie dürfen auch nicht den Zügen anderer in unserer Erkenntnis schon feststehender Bilder widersprechen. Daraufhin könnte man nun behaupten: Es sei nicht denkbar, dafs das Hamilton'sche Prinzip oder ein Satz von verwandten Eigenschaften in Wahrheit ein Grundgesetz der Mechanik und damit ein Grundgesetz der Natur vorstelle, denn von einem Grundgesetze sei von vornherein Einfachheit und Schlichtheit zu erwarten, das Hamilton'sche Prinzip aber stelle, wenn man es analysiere, eine äufserst verwickelte Aussage dar. Nicht allein mache es die gegenwärtige Bewegung abhängig von Folgen, welche erst in der Zukunft hervortreten können und mute dadurch der leblosen Natur Absichten zu, sondern, was schlimmer sei, es mute der Natur sinnlose Absichten zu. Denn das Integral, dessen Minimum das Hamilton'sche Prinzip fordert, habe keine einfache physikalische Bedeutung; es sei aber für die Natur ein unverständliches Ziel, einen mathematischen Ausdruck zum Minimum zu machen oder seine Variation zum Verschwinden zu bringen. Die gewöhnliche Antwort, welche die heutige Physik auf derartige Angriffe bereit hält, ist diese, dafs die Voraussetzungen, von welchen die Betrachtungen ausgehen, metaphysischen Ursprungs seien, dafs aber die Physik darauf verzichtet habe und es nicht mehr als Pflicht anerkenne, den Ansprüchen der Metaphysik gerecht zu werden. Sie lege kein Gewicht mehr auf die Gründe, welche von metaphysischer Seite einst zu Gunsten der Prinzipien vorgebracht seien, welche einen Zweck in der Natur andeuten; ebensowenig aber könne sie jetzt Einwänden meta-

physischen Charakters gegen ebendieselben Prinzipien ihr Ohr leihen. Wenn wir bei solchem Rechten zu entscheiden hätten, so würden wir nicht unbillig denken, wenn wir uns mehr auf Seiten des Angreifers, als des Verteidigers stellten. Kein Bedenken, welches überhaupt Eindruck auf unsern Geist macht, kann dadurch erledigt werden, dafs es als metaphysisch bezeichnet wird; jeder denkende Geist hat als solcher Bedürfnisse, welche der Naturforscher metaphysische zu nennen gewohnt ist. Überdies läfst sich in dem vorliegenden Falle, wie wohl in allen ähnlichen, die gesunde und berechtigte Quelle unseres Bedürfnisses ganz wohl aufweisen. Freilich können wir von der Natur nicht a priori Einfachheit fordern, noch auch urteilen, was in ihrem Sinne einfach sei. Aber den Bildern, welche wir uns von ihr machen, können wir als unsern eigenen Schöpfungen Vorschriften machen. Wir urteilen nun mit Recht, dafs, wenn unsere Bilder den Dingen gut angepafst sind, dafs dann die wirklichen Beziehungen der Dinge durch einfache Beziehungen zwischen den Bildern müssen wiedergegeben werden. Wenn aber die wirklichen Beziehungen zwischen den Dingen nur durch verwickelte, ja dem unvorbereiteten Geiste sogar unverständliche Beziehungen zwischen den Bildern sich wiedergeben lassen, so urteilen wir, dafs diese Bilder den Dingen nur ungenügend angepafst sind. Unsere Forderung der Einfachheit geht also nicht an die Natur, sondern an die Bilder, welche wir uns von ihr machen, und unser Widerspruch gegen eine verwickelte Aussage als Grundgesetz drückt nur die Überzeugung aus, dafs, wenn der Inhalt der Aussage richtig und umfassend sei, er sich durch zweckmäfsigere Wahl der Grundvorstellungen auch in einfacherer Form müsse aussprechen lassen. Eine andere Äufserung derselben Überzeugung ist der in uns erwachende Wunsch, von dem äufseren Verständnisse eines derartigen Gesetzes zu seinem tieferen und eigentlichen Sinn vorzudringen, von dessen Vorhandensein wir überzeugt sind. Ist diese Auffassung richtig, so bildet in der That der vorgebrachte Einwurf ein berechtigtes Bedenken gegen das System, aber er trifft dann nicht sowohl seine Zulässigkeit, als vielmehr seine Zweckmäfsigkeit und er käme bei der Beurteilung der letzteren in Betracht. Es ist indessen nicht nötig, deshalb nochmals zur Besprechung jener zurückzukehren.

Überblicken wir noch einmal dasjenige, was wir über die Vorzüge des zweiten Bildes vorzubringen hatten, so können wir von der Gesamtheit desselben nicht allzu befriedigt sein. Obgleich die ganze Richtung der neueren Physik uns anlockt, den Begriff der Energie in den Vordergrund zu stellen und ihn auch in der Mechanik als Grund- und Eckstein unseres Aufbaues zu benutzen, so bleibt es doch mehr als zweifelhaft, ob wir bei diesem Vorgehen die Härten und Rauhigkeiten vermeiden können, welche uns in dem ersten Bilde der Mechanik anstöfsig waren. In der That habe ich auch diesem zweiten Wege der Darstellung nicht deshalb eine längere Besprechung gewidmet, um zur Beschreitung desselben zu ermutigen, sondern vielmehr um anzudeuten, aus welchen Gründen ich selbst ihn aufgegeben habe, nachdem ich zuerst ihn zu verfolgen versucht hatte.

3.

Eine dritte Anordnung der Prinzipien der Mechanik ist diejenige, welche in dem Hauptteil des Buches ausführlich dargelegt werden soll, deren Hauptzüge wir aber schon hier in der Einleitung vorführen wollen, um sie in demselben Sinne einer Kritik zu unterwerfen, wie es mit den beiden ersten geschehen ist. Von jenen unterscheidet sie sich wesentlich dadurch, dafs sie von nur drei unabhängigen Grundvorstellungen ausgeht; denen der Zeit, des Raumes und der Masse. Sie betrachtet daher als ihre Aufgabe, die natürlichen Beziehungen zwischen diesen dreien und allein zwischen diesen dreien darzustellen. Ein vierter Begriff, wie der Begriff der Kraft oder der Energie, an welchen sich vorhin die Schwierigkeiten knüpften, ist als selbständige Grundvorstellung beseitigt. Die Bemerkung, dafs drei von einander unabhängige Vorstellungen nötig, aber auch hinreichend seien zur Entwicklung

der Mechanik, hat schon G. Kirchhoff seinem Lehrbuche der Mechanik vorangestellt. Ganz ohne Ersatz kann freilich die so in den Grundvorstellungen ausfallende Mannigfaltigkeit nicht bleiben. In unserer Darstellung suchen wir die entstehende Lücke auszufüllen durch Benützung einer Hypothese, welche hier nicht zum ersten Male aufgestellt wird, welche man aber nicht in die Elemente der Mechanik selbst einzuführen gewohnt ist, und deren Wesen wir etwa in der folgenden Weise erläutern können.

Versuchen wir die Bewegungen der uns umgebenden Körper zu verstehen und auf einfache und durchsichtige Regeln zurückzuführen, indem wir aber nur dasjenige berücksichtigen, was wir unmittelbar vor Augen haben, so schlägt unser Versuch im allgemeinen fehl. Wir werden bald gewahr, dafs die Gesamtheit dessen, was wir sehen und greifen können noch keine gesetzmäfsige Welt bildet, in welcher gleiche Zustände stets gleiche Folgen haben. Wir überzeugen uns, dafs die Mannigfaltigkeit der wirklichen Welt gröfser sein mufs als die Mannigfaltigkeit der Welt, welche sich unseren Sinnen unmittelbar offenbart. Wollen wir ein abgerundetes, in sich geschlossenes, gesetzmäfsiges Weltbild erhalten, so müssen wir hinter den Dingen, welche wir sehen, noch andere, unsichtbare Dinge vermuten, hinter den Schranken unserer Sinne noch heimliche Mitspieler suchen. Diese tieferliegenden Einflüsse erkannten wir in den ersten beiden Darstellungen an und wir dachten sie uns als Wesen einer eigenen und besonderen Art, deshalb schufen wir zu ihrer Wiedergabe in unserem Bilde die Begriffe der Kraft und der Energie. Es steht uns aber noch ein anderer Weg offen. Wir können zugeben, dafs ein verborgenes Etwas mitwirke und doch leugnen, dafs dieses Etwas einer besonderen Kategorie angehöre. Es steht uns frei anzunehmen, dafs auch das Verborgene nichts anderes sei als wiederum Bewegung und Masse, und zwar solche Bewegung und Masse, welche sich von der sichtbaren nicht an sich unterscheidet, sondern nur in Beziehung auf uns und auf unsere gewöhnlichen Mittel der Wahrnehmung. Diese Auffassungsweise ist nun eben unsere Hypothese. Wir nehmen also an, dafs es möglich sei, den sichtbaren Massen des

Weltalls andere denselben Gesetzen gehorchende Massen hinzuzudichten von solcher Art, dafs dadurch das Ganze Gesetzmäfsigkeit und Verständlichkeit gewinnt, und zwar nehmen wir an, dafs dies ganz allgemein und in allen Fällen möglich sei, und dafs es daher andere Ursachen der Erscheinungen auch gar nicht gebe, als die hierdurch zugelassenen. Was wir gewohnt sind als Kraft und als Energie zu bezeichnen ist dann für uns nichts weiter als eine Wirkung von Masse und Bewegung, nur braucht es nicht immer die Wirkung grobsinnlich nachweisbarer Masse und grobsinnlich nachweisbarer Bewegung zu sein. Eine derartige Erklärung einer Kraft aus Bewegungsvorgängen pflegt man eine dynamische zu nennen, und man kann wohl sagen, dafs die Physik gegenwärtig derartigen Erklärungen in hohem Grade hold ist. Die Kräfte der Wärme hat man mit Sicherheit auf die verborgenen Bewegungen greifbarer Massen zurückgeführt. Durch MAXWELL's Verdienst ist die Vermutung fast zur Überzeugung geworden, dafs wir in den elektrodynamischen Kräften die Wirkung der Bewegung verborgener Massen vor uns haben. Lord KELVIN rückt die Möglichkeit dynamischer Erklärungen der Kräfte mit Vorliebe in den Vordergrund seiner Betrachtungen; in seiner Theorie von der Wirbelnatur der Atome hat er ein dieser Anschauung entsprechendes Bild des Weltganzen zu geben versucht. VON HELMHOLTZ hat in der Untersuchung über die cyklischen Systeme die wichtigste Form der verborgenen Bewegung ausführlich und zum Zwecke allgemeiner Anwendung behandelt; durch ihn ist den Ausdrücken „verborgene“ Masse, „verborgene“ Bewegung die Geltung technischer Ausdrücke im Deutschen verliehen. Hat aber jene Hypothese die Fähigkeit, die geheimnisvollen Kräfte allmählich aus der Mechanik wieder zu eliminieren, so kann sie auch verhindern, dafs dieselben überhaupt in die Mechanik eintreten. Und entspricht die Verwertung der Hypothese zu ersterem Zwecke der Denkweise der heutigen Physik, so mufs das Gleiche von ihrer Benutzung zu letzterem Zwecke gelten. Dies ist der leitende Gedanke, von welchem wir ausgehen und durch dessen Verfolgung dasjenige Bild entsteht, welches wir als das dritte bezeichneten, und dessen allgemeine Umrisse wir nun umfahren wollen.

Zuerst führen wir also ein die drei unabhängigen Grundbegriffe Zeit, Raum und Masse als Gegenstände der Erfahrung, indem wir angeben, durch welche konkreten sinnlichen Erfahrungen wir uns Zeiten, Massen, räumliche Gröfsen bestimmt denken wollen. Was die Massen anbelangt, so behalten wir uns vor, neben den sinnlich wahrnehmbaren Massen durch Hypothese verborgene Massen einzuführen. Wir stellen sodann die Beziehungen zusammen, welche zwischen jenen konkreten Erfahrungen stets obwalten und welche wir als die wesentlichen Beziehungen zwischen den Grundbegriffen festzuhalten haben. Es ist naturgemäfs, dafs wir die Grundbegriffe zunächst zu je zweien verbinden. Die Beziehungen, welche Raum und Zeit allein betreffen, können wir als Kinematik voraussenden. Zwischen Masse und Zeit allein besteht keine Verknüpfung. Masse und Raum dagegen treten wieder zusammen zu einer Reihe wichtiger erfahrungsmäfsiger Beziehungen. Wir finden nämlich zwischen den Massen der Natur gewisse rein räumliche Zusammenhänge, welche darin bestehen, dafs von Anbeginn an für alle Zeiten, und also unabhängig von der Zeit, jenen Massen gewisse Lagen und gewisse Änderungen der Lage als mögliche, alle anderen aber als unmögliche vorgeschrieben und zugeordnet sind. Wir können über diese Zusammenhänge ferner allgemein aussagen, dafs sie nur die relative Lage der Massen unter einander betreffen und weitergehend, dafs sie gewissen Bedingungen der Stetigkeit genügen, welche ihren mathematischen Ausdruck darin finden, dafs sich die Zusammenhänge selbst stets durch homogene lineare Gleichungen zwischen den ersten Differentialen derjenigen Gröfsen wiedergeben lassen, durch welche wir die Lage der Massen bezeichnet haben. Die Zusammenhänge bestimmter materieller Systeme im einzelnen zu erforschen ist nicht Sache der Mechanik, sondern der experimentellen Physik; die bezeichnenden Merkmale, durch welche sich die verschiedenen materiellen Systeme der Natur unterscheiden, sind nach unserer Vorstellung eben einzig und allein die Zusammenhänge ihrer Massen. In den bisherigen Erörterungen haben wir nur je zwei der Grundbegriffe für sich verbunden, nunmehr wenden wir uns der eigentlichen Mechanik im engeren Sinne zu, in welcher alle drei zusammenzutreten haben. Es gelingt uns

ihre erfahrungsmäſsige allgemeine Verknüpfung zusammenzufassen in ein einziges Grundgesetz, welches eine sehr nahe Analogie mit dem gewöhnlichen Trägheitsgesetz zieht. In der That läſst es sich in der Ausdrucksweise, welche wir benutzen, wiedergeben in der Aussage: jede natürliche Bewegung eines selbständigen materiellen Systems bestehe darin, daſs das System mit gleichbleibender Geschwindigkeit eine seiner geradesten Bahnen verfolge. Diese Aussage ist allerdings nur verständlich, nachdem die benutzte mathematische Redeweise gehörig erörtert ist; der Sinn des Satzes aber läſst sich auch in der gewöhnlichen Sprache der Mechanik wiedergeben. Jener Satz faſst nämlich einfach das gewöhnliche Trägheitsgesetz und das Gauss'sche Prinzip des kleinsten Zwanges in eine einzige Behauptung zusammen. Er sagt also aus, daſs, wenn die Zusammenhänge des Systems einen Augenblick gelöst werden könnten, daſs sich dann seine Massen in geradliniger und gleichförmiger Bewegung zerstreuen würden, daſs aber, da solche Auflösung nicht möglich ist, sie jener angestrebten Bewegung wenigstens so nahe bleiben als möglich. Wie jenes Grundgesetz in unserem Bilde der erste Erfahrungssatz der eigentlichen Mechanik ist, so ist er auch der letzte. Aus ihm zusammen mit der zugelassenen Hypothese verborgener Massen und gesetzmäſsiger Zusammenhänge leiten wir den übrigen Inhalt der Mechanik rein deduktiv ab. Um ihn gruppieren wir die übrigen allgemeinen Prinzipien nach ihrer Verwandtschaft zu ihm und untereinander, als Folgerungen oder als Teilaussagen. Wir bemühen uns zu zeigen, daſs bei dieser Anordnung der Inhalt unserer Wissenschaft nicht weniger reich und mannigfaltig ausfällt, als der Inhalt einer Mechanik, welche von vier Grundvorstellungen ausgeht, jedenfalls nicht weniger reich und mannigfaltig als es die Darstellung der Natur verlangt. Übrigens erweist es sich auch hier bald als zweckmäſsig, den Begriff der Kraft einzuführen. Aber die Kraft tritt nun nicht auf als etwas von uns unabhängiges und uns fremdes, sondern als eine mathematische Hilfskonstruktion, deren Eigenschaften wir völlig in unserer Gewalt haben, und welche also auch für uns nichts Rätselhaftes an sich haben kann. Nach dem Grundgesetze muſs nämlich überall da, wo zwei Körper demselben System angehören, die Bewegung des

einen durch die Bewegung des anderen mitbestimmt sein. Der Begriff der Kraft entsteht nun dadurch, dafs wir es aus angebbaren Gründen zweckmäfsig finden, diese Bestimmung der einen Bewegung durch die andere in zwei Stadien zu zerlegen und uns zu sagen: die Bewegung des ersten Körpers bestimme zunächst eine Kraft, diese Kraft erst bestimme die Bewegung des zweiten Körpers. Auf diese Weise wird jede Kraft zwar stets Ursache einer Bewegung, mit gleichem Rechte aber zugleich auch stets Folge einer Bewegung; sie wird, genau gesprochen, das nur gedachte Mittelglied zwischen zwei Bewegungen. Es ist klar, dafs bei dieser Auffassung die allgemeinen Eigenschaften der Kräfte mit Denknotwendigkeit aus dem Grundgesetze folgen müssen und wenn wir in möglichen Erfahrungen diese Eigenschaften bestätigt sehen, so kann uns dies nicht einmal verwundern, wenn anders wir an unserm Grundgesetz nicht zweifeln. Mit dem Begriffe der Energie und mit allen anderen einzuführenden Hilfskonstruktionen liegt die Sache ganz ebenso.

Was wir bisher gesagt haben, betraf den physikalischen Inhalt des vorzuführenden Bildes und erschöpfte denselben im Rahmen dieser Einleitung; es wird zweckmäfsig sein, nun auch eine kurze Erörterung der besonderen mathematischen Form zu widmen, in welcher wir denselben wiedergeben werden. Jener Inhalt ist von dieser Form ganz unabhängig und es ist vielleicht nicht ganz klug gehandelt, dafs wir einen von dem Herkömmlichen abweichenden Inhalt sogleich in einer ungewohnten Form darbieten. Indessen weichen ja sowohl Form als Inhalt ein jedes für sich nur sehr wenig von wohlbekannten Dingen ab, aufserdem passen eben dieser Inhalt und diese Form so zu einander, dafs ihre Vorzüge sich gegenseitig stützen. Das wesentliche Merkmal der benutzten Terminologie besteht nun darin, dafs sie gleich von vornherein ganze Systeme von Punkten vorstellt und in Betracht zieht, nicht aber jedesmal von den einzelnen Punkten ausgeht. Einem jeden sind die Ausdrücke „Lage eines Systems von Punkten“ und „Bewegung eines Systems von Punkten“ geläufig. Es ist eine nicht unnatürliche Fortsetzung dieser Redeweise, wenn wir die Gesamtheit der bei der Bewegung durchlaufenen Lagen

eines Systems als seine Bahn bezeichnen. Jeder kleinste Teil dieser Bahn ist alsdann ein Bahnelement. Von zwei Bahnelementen kann das eine ein Teil des andern sein, sie unterscheiden sich alsdann noch nach der Gröfse und nur nach dieser. Zwei Bahnelemente, welche von derselben Lage ausgehen, können aber auch verschiedenen Bahnen angehören, alsdann ist keines von beiden ein Teil des anderen und sie unterscheiden sich nicht nur hinsichtlich der Gröfse; wir sagen deshalb, dafs sie auch verschiedene Richtung haben. Durch diese Aussagen sind freilich die Merkmale „Gröfse“ und „Richtung“ für die Bewegung eines Systems noch nicht eindeutig bestimmt; wir können aber unsere Definition geometrisch oder analytisch so vervollständigen, dafs ihre Folgen weder mit sich selbst noch mit dem Gesagten in Widerspruch geraten und dafs zugleich die definierten Gröfsen in der Geometrie des Systems genau den Gröfsen entsprechen, welche wir in der Geometrie des Punktes mit den gleichen Namen bezeichnen, mit welchen bekannten Gröfsen sie auch stets zusammenfallen, sobald das System sich auf einen Punkt reduziert. Sind aber einmal die Merkmale Gröfse und Richtung bestimmt, so liegt es nahe genug, die Bahn eines Systems gerade zu nennen, wenn alle ihre Elemente die gleiche Richtung haben; und krumm, sobald die Richtung der Elemente sich von Lage zu Lage ändert. Als Mafs der Krümmung bietet sich wie in der Geometrie des Punktes die Änderungsgeschwindigkeit der Richtung mit der Lage von selber dar. Durch diese Definition sind nun aber schon eine ganze Reihe von Beziehungen gegeben und die Zahl derselben wächst, sobald die Bewegungsfreiheit des betrachteten Systems durch seine Zusammenhänge eingeschränkt ist. Insbesondere lenken alsdann gewisse Klassen von Bahnen die Aufmerksamkeit auf sich, welche sich unter den möglichen durch besondere einfache Eigenschaften auszeichnen. Hierher gehören vor allen Dingen diejenigen Bahnen, welche in jeder ihrer Lagen so wenig wie möglich gekrümmt sind und welche wir als die geradesten Bahnen des Systems bezeichnen. Sie sind es, von welchen in dem Grundgesetz die Rede ist und welche wir schon oben bei Anführung desselben erwähnt haben. Hierher gehören ferner diejenigen Bahnen, welche die kürzeste Verbindung zwischen irgend zweien ihrer Lagen bilden, und

welche wir als kürzeste Bahnen des Systems bezeichnen. Unter gewissen Bedingungen fallen die Begriffe der geradesten und der kürzesten Bahnen zusammen. Dies Verhältnis ist uns durch Erinnerung an die Theorie der krummen Oberflächen sogar höchst geläufig, aber allgemein und unter allen Umständen hat es gleichwohl nicht statt. Die Sammlung und Ordnung aller hier auftretenden Beziehungen gehört in die Geometrie der Punktsysteme und die Entwickelung dieser Geometrie hat eigenen mathematischen Reiz; wir verfolgen dieselbe aber nur soweit als es der augenblickliche Zweck der physikalischen Anwendung erfordert. Da ein System von n Punkten eine $3n$fache Mannigfaltigkeit der Bewegung darbietet, welche aber durch die Zusammenhänge des Systems auch auf jede beliebige Zahl vermindert werden kann, so entstehen viele Analogien mit der Geometrie eines mehrdimensionalen Raumes, welche zum Teil so weit gehen, dafs dieselben Sätze und Bezeichnungen hier und dort Bedeutung haben können. Es ist aber in unserem Interesse zu betonen, dafs diese Analogien nur formale sind, und dafs trotz eines gelegentlich fremdartigen Klanges sich unsere Betrachtung ausnahmslos auf konkrete Gebilde des Raumes unserer Sinnenwelt beziehen, dafs also auch alle unsere Aussagen mögliche Erfahrungen darstellen und wenn es nötig wäre, durch unmittelbare Versuche, nämlich durch Messung an Modellen bestätigt werden könnten. Den Vorwurf, dafs wir beim Aufbau einer Erfahrungswissenschaft die Welt der Erfahrung verlassen, diesen Vorwurf haben wir also nicht zu fürchten. Dagegen haben wir Rede zu stehen auf die Frage, ob sich denn die Weitläufigkeit einer neuen und ungewohnten Ausdrucksweise lohne, und welchen entsprechenden Nutzen wir von der Anwendung derselben erwarten? Als Antwort nennen wir darauf als ersten Nutzen die grofse Einfachheit und Kürze, mit welcher sich die meisten allgemeinen und umfassenden Aussagen wiedergeben lassen. In der That erfordern Sätze, welche ganze Systeme behandeln hier nicht mehr Worte und nicht mehr Begriffe, als wenn sie unter Benutzung der gewöhnlichen Ausdrucksweise in Bezug auf einen einzelnen Punkt ausgesagt würden. Die Mechanik des materiellen Systems erscheint hier nicht mehr als eine Erweiterung und Verwickelung der Mechanik des einzelnen Punktes,

sondern die letztere fällt als selbständige Untersuchung fort oder tritt doch nur gelegentlich als Vereinfachung und besonderer Fall der ersteren auf. Wendet man etwa ein, diese Einfachheit sei künstlich erzeugt, so antworten wir, dafs es gar keine andere Methode gebe, einfache Beziehungen zu schaffen, als die künstliche und wohlerwogene Anpassung unserer Begriffe an die darzustellenden Verhältnisse. Will man aber in jenem Vorwurf des Künstlichen den Nebensinn des Gesuchten und Unnatürlichen hervorheben, so dürfen wir dem entgegenhalten, dafs man vielleicht mit mehr Recht die Betrachtung ganzer Systeme für das Natürliche und Naheliegende halten könne, als die Betrachtung einzelner Punkte. Denn in Wahrheit ist uns das materielle System unmittelbar gegeben, der einzelne Massenpunkt eine Abstraktion; alle wirkliche Erfahrung wird unmittelbar nur an Systemen gewonnen und die an einfachen Punkten möglichen Erfahrungen sind daraus durch Verstandesschlüsse abgezogen. Als einen zweiten, allerdings nicht sehr wesentlichen Nutzen heben wir die Vorzüge der Form hervor, welche durch unsere mathematische Einkleidung dem Grundgesetz gegeben werden kann. Ohne jene Einkleidung müfsten wir es zerlegen in das erste Newton'sche Gesetz und das Gauss'sche Prinzip des kleinsten Zwanges. Beide zusammen würden nun zwar genau dieselbe Thatsache darstellen, aber sie würden neben dieser Thatsache andeutungsweise noch ein wenig mehr enthalten und dieses Mehr wäre ein Zuviel. Erstens rufen sie die unserer Mechanik fremde Vorstellung wach, dafs die Zusammenhänge der materiellen Systeme doch auch gelöst werden könnten, obwohl wir dieselben als von Anbeginn an bestehende und als gänzlich unlösbare bezeichnet haben. Zweitens kann man bei Benutzung des Gauss'schen Prinzips nicht vermeiden, die Nebenvorstellung zu erwecken, dafs man nicht nur eine Thatsache, sondern zugleich auch den Grund dieser Thatsache mitteilen wolle. Man kann nicht aussagen, dafs die Natur eine Gröfse, welche man Zwang nennt, beständig so klein als möglich hält, ohne anzudeuten, dafs dies geschehe, eben weil jene Gröfse für die Natur einen Zwang, das heifst ein Unlustgefühl bedeute. Man kann nicht aussagen, dafs die Natur verfahre wie ein verständiger Rechner, der seine Beobachtung ausgleicht, ohne nahezulegen,

dafs hier wie dort wohlüberlegte Absicht der Grund des Verfahrens sei. Gewifs liegt gerade ein besonderer Reiz in derartigen Seitenblicken und dies hat GAUSS selbst in gerechter Freude an seiner schönen und für unsere Mechanik grundlegenden Entdeckung hervorgehoben. Aber doch müssen wir uns gestehen, dafs dieser Reiz nur ein Spiel mit dem Geheimnisvollen ist; im Ernste glauben wir selbst nicht an unser Vermögen, durch derartige Andeutungen halb schweigend das Welträtsel zu lösen. Unser eigenes Grundgesetz vermeidet solche Winke gänzlich. Indem es genau die Form des gewöhnlichen Trägheitsgesetzes annimmt, giebt es so gut wie dieses eine nackte Thatsache ohne jeden Schein einer Begründung derselben. In demselben Mafse, in welchem es dadurch ärmer und ungeschmückter erscheint, in demselben Mafse ist es ehrlicher und wahrer. Doch vielleicht verführt mich die Vorliebe für die kleine Abänderung, welche ich selbst an dem GAUSS'schen Prinzip angebracht habe, dafs ich Vorzüge in ihr erblicke, welche fremden Augen notwendig verborgen sind. Sicher aber wird man, denke ich, dagegen zustimmen, wenn ich als dritten Nutzen unserer Methode anführe, dafs dieselbe ein helles Licht auf die von HAMILTON erfundene Behandlungsweise mechanischer Probleme mit Hilfe charakteristischer Funktionen wirft. Diese Behandlungsweise hat in den sechzig Jahren ihres Bestehens Anerkennung und Ruhm genug gefunden, aber sie ist doch mehr aufgefafst und behandelt worden wie ein neuer Seitenzweig der Mechanik, dessen Wachstum und Weiterbildung neben der gewöhnlichen Methode und unabhängig von derselben vor sich zu gehen habe. In unserer Form der mathematischen Darstellung aber trägt die HAMILTON'sche Methode nicht den Charakter eines Seitenzweiges, sondern sie erscheint als die gerade, naturgemäfse und sozusagen selbstverständliche Fortsetzung der elementaren Aussagen in allen den Fällen, in welchen sie überhaupt anwendbar ist. Auch das läfst unsere Darstellungsweise klar hervortreten, dafs die HAMILTON'sche Behandlungsweise nicht in den besonderen physikalischen Grundlagen der Mechanik ihre Wurzeln hat, wie man wohl gewöhnlich annimmt, sondern dafs sie im Grunde genommen eine rein geometrische Methode ist, welche begründet und ausgebildet werden kann, ganz unabhängig von

der Mechanik, und welche mit dieser in keiner engeren Beziehung steht, als alle andere von der Mechanik benutzte geometrische Erkenntnis auch. Übrigens ist es von den Mathematikern seit lange bemerkt worden, dafs die HAMILTON'sche Methode rein geometrische Wahrheiten enthält und zum klaren Ausdruck derselben eine eigentümliche, ihr angepafste Ausdrucksweise geradezu fordert. Nur ist diese Thatsache in etwas verwirrender Form zu Tage getreten, nämlich in den Analogieen, welche man beim Verfolg der HAMILTON'schen Gedanken zwischen der gewöhnlichen Mechanik und der Geometrie eines vieldimensionalen Raumes gefunden hat. Unsere Ausdrucksweise giebt eine einfache und verständliche Erklärung dieser Analogieen; sie gestattet auch die Vorteile derselben zu geniefsen und sie vermeidet doch die Unnatürlichkeit, welche in der Verquickung eines Zweiges der Physik mit aufsersinnlichen Abstraktionen liegt.

Wir haben nunmehr unser drittes Bild der Mechanik nach Inhalt und Form soweit geschildert, als es angeht ohne dem Buche selbst vorzugreifen; zugleich hinreichend, um es den beabsichtigten Fragen nach seiner Zulässigkeit, seiner Richtigkeit und seiner Zweckmäfsigkeit unterwerfen zu können. Was zunächst die logische Zulässigkeit des entworfenen Bildes anlangt, so denke ich, dafs dieselbe selbst strengen Anforderungen genügen könne, und hoffe, dafs diese Meinung der Zustimmung begegnen möge. Ich lege auf diesen Vorzug der Darstellung das gröfste Gewicht, ja einzig Gewicht. Ob das entworfene Bild zweckmäfsiger ist, als ein anderes, ob es fähig ist alle zukünftige Erfahrung zu umfassen, ja ob es auch nur alle gegenwärtige Erfahrung umfafst, alles dies ist mir fast nichts gegen die Frage, ob es in sich abgeschlossen, rein und widerspruchsfrei ist. Denn nicht deshalb habe ich es zu zeichnen versucht, weil die Mechanik nicht bereits für ihre Anwendungen genügend Zweckmäfsigkeit zeigte, noch weil dieselbe mit der Erfahrung irgend in Widerstreit geraten wäre, sondern allein um mich von dem drückenden Gefühle zu befreien, dafs ihre Elemente nicht frei seien von Dunkelheiten und Unverständlichkeiten für mich. Nicht das einzig mögliche Bild der mechanischen Vorgänge, noch auch das

beste Bild, sondern überhaupt nur ein begreifbares Bild wollte ich suchen und an einem Beispiel zeigen, dafs ein solches möglich sei und wie es etwa aussehen müsse. Die Vollkommenheit ist uns freilich in jeder Richtung unerreichbar, und ich mufs mir gestehen, dafs trotz vieler Mühe das erlangte Bild nicht in allen Punkten von so überzeugender Klarheit ist, dafs es nicht dem Zweifel ausgesetzt und der Verteidigung bedürftig wäre. Doch scheint mir von Einwänden allgemeiner Art nur ein einziger hinreichend nahe zu liegen, dafs es sich lohnt, ihn vorwegzunehmen und abzuschneiden. Er betrifft die Natur der starren Verbindungen, welche wir zwischen den Massen annehmen, und welche wir auch in unserem System auf keine Weise entbehren können. Viele Physiker werden zunächst der Ansicht sein, dafs mit diesen Verbindungen doch schon Kräfte in die Elemente der Mechanik eingeführt und zwar in heimlicher und deshalb unerlaubter Weise eingeführt seien. Denn — so werden sie sagen — starre Verbindungen sind nicht denkbar ohne Kräfte; starre Verbindungen können nicht auf andere Weise zu stande kommen, als indem sie durch Kräfte erzwungen werden. Wir antworten darauf: Eure Behauptung ist allerdings richtig für die Denkweise der gewöhnlichen Mechanik, aber sie ist nicht richtig unabhängig von dieser Denkweise; sie erscheint nicht zwingend dem Geist, welcher die Sache unbefangen und wie zum erstenmal betrachtet. Gesetzt wir finden, auf welche Weise auch immer, dafs der Abstand zweier bestimmter punktförmiger Massen zu allen Zeiten und unter allen Umständen derselbe bleibt, so können wir dieser Thatsache Ausdruck verleihen, ohne andere als räumliche Vorstellungen zu benutzen und die ausgesagte Thatsache hat als Thatsache für die Voraussicht zukünftiger Erfahrung und für alle andern Zwecke ihren Wert unabhängig von einer etwaigen Erklärung, welche wir besitzen oder nicht besitzen. Auf keinen Fall wird der Wert der Thatsache erhöht oder unser Verständnis von ihr verbessert dadurch, dafs wir sie in der Form mitteilen: Zwischen jenen Massen wirke eine Kraft, welche ihren Abstand konstant hält, oder: Zwischen ihnen sei eine Kraft thätig, welche verhindert, dafs sich ihr Abstand von seinem festen Wert entferne. Aber — so wird man uns wieder einwenden — wir sehen ja, dafs die letztere Erklärung, obwohl scheinbar nur eine lächerliche Umschreibung,

gleichwohl richtig ist. Denn alle Verbindungen der wirklichen Welt sind nur angenähert starr und der Schein der Starrheit wird nur dadurch hervorgebracht, dafs die elastischen Kräfte die kleinen Abweichungen von der Ruhelage beständig wieder vernichten. Wir antworten: Von solchen starren Verbindungen der greifbaren Körper, welche nur angenähert verwirklicht sind, wird unsere Mechanik selbstverständlich als Thatsache auch nur aussagen, dafs ihnen angenähert genügt werde und zu dieser Aussage, auf welche es ankommt, bedarf sie wiederum des Begriffs der Kraft nicht. Will unsere Mechanik aber in zweiter Annäherung die Abweichungen und damit die elastischen Kräfte berücksichtigen, so wird sie für diese wie für alle Kräfte eine dynamische Erklärung annehmen; bei der Suche nach den wirklich starren Verbindungen wird sie vielleicht zur Welt der Atome hinabzusteigen haben, aber diese Erörterungen sind hier nicht am Platze, sie berühren nicht mehr die Frage, ob es logisch zulässig sei, feste Verbindungen unabhängig von und vor den Kräften zu behandeln. Dafs diese Frage zu bejahen sei und nur dies wünschten wir zu erweisen und glauben wir erwiesen zu haben. Steht aber dies fest, so können wir aus der Natur der festen Verbindungen die Eigenschaften der Kräfte und ihr Verhalten ableiten ohne uns damit einer petitio principii schuldig gemacht zu haben. Andere Einwände ähnlicher Art sind möglich, können aber, wie ich glaube, in ähnlicher Art erledigt werden.

Dem Wunsche, die logische Reinheit des Systems auch in allen Einzelheiten zu erweisen, habe ich dadurch Ausdruck gegeben, dafs ich für die Darstellung die ältere synthetische Form benutzt habe. Diese Form bietet für jenen Zweck schon darin einen gewissen Vorteil, dafs sie uns zwingt, jeder wesentlichen Aussage den beabsichtigten logischen Wert in abwechslungsarmer aber bestimmter Angabe vorauszuschicken. Dadurch werden die bequemen Vorbehalte und Vieldeutigkeiten unmöglich gemacht, zu welchen die gewöhnliche Sprache durch den Reichtum ihrer Verknüpfung verlockt. Der wichtigste Vorteil der gewählten Form ist aber dieser, dafs sie stets nur auf Vorbewiesenes sich beruft, niemals auf später zu erweisendes, so dafs man der ganzen Kette sicher ist, wenn man beim Vor-

wärtsschreiten nur jedes einzelne Glied genügend prüft. In dieser Hinsicht habe ich den Pflichten dieser Art der Darstellung mit Strenge zu genügen gesucht. Im übrigen ist es selbstverständlich, daſs die Form allein vor Irrtum und Übersehen keinen Schutz gewähren kann und bitte ich etwa eingeflossene Fehler nicht um des etwas anspruchsvollen Vortrags willen strenger zu beurteilen. Ich hoffe, solche Fehler werden stets verbesserungsfähig sein und daher keinen wesentlichen Punkt betreffen. Bisweilen bin ich übrigens bewuſster Weise zur Vermeidung allzu groſser Weitläufigkeit hinter der vollen Schärfe zurückgeblieben, welche die Darstellungsweise eigentlich fordert. Es bedarf keiner besonderen Begründung, daſs ich den Betrachtungen der eigentlichen Mechanik, welche von physikalischer Erfahrung abhängt, diejenigen Beziehungen vorausgeschickt habe, welche allein Folge der gewählten Definitionen und mathematischer Notwendigkeit sind, und welche, wenn überhaupt, so doch jedenfalls in anderm Sinne als jene mit der Erfahrung zusammenhängen. Nichts hindert übrigens den Leser, mit dem zweiten Buche zu beginnen. Die durchsichtige Analogie mit der Mechanik des einzelnen Punktes und der bekannte Stoff werden ihn den Sinn der vorgetragenen Sätze leicht erraten lassen. Hat er der benutzten Redeweise Zweckmäſsigkeit zugebilligt, so ist immer noch Zeit, daſs er sich aus dem ersten Buche von ihrer Zulässigkeit überzeuge.

Wenden wir uns jetzt der zweiten wesentlichen Forderung zu, welcher unser Bild zu genügen hat, so ist es zunächst unzweifelhaft, daſs das System sehr viele natürliche Bewegungen richtig darstellt. Allein nach den Ansprüchen des Systems genügt dies nicht; es muſs als notwendige Ergänzung die Behauptung dahin erweitert werden, daſs das System alle natürlichen Bewegungen ohne Ausnahme umfasse. Auch dies kann man, denke ich, behaupten, wenigstens in dem Sinne, daſs sich zur Zeit keine bestimmten Erscheinungen angeben lassen, welche dem System nachweislich widersprächen. Es ist freilich klar, daſs die Ausdehnung auf alle Erscheinungen einer scharfen Prüfung nicht zugänglich ist, daſs daher das System über das Ergebnis sicherer Erfahrung ein wenig hinausgeht und also den Charakter einer Hypothese trägt, welche ver-

suchsweise angenommen wird und auf plötzliche Widerlegung durch ein einziges Beispiel oder allmähliche Bestätigung durch sehr viele Beispiele wartet. Vornehmlich sind es zwei Stellen, an welchen ein Hinausgehen über sichere Erfahrung stattfindet: Die eine betrifft unsere Beschränkung der möglichen Zusammenhänge, die andere betrifft die dynamische Erklärung der Kräfte. Mit welchem Rechte können wir versichern, daſs alle Zusammenhänge der Natur durch lineare Differentialgleichungen erster Ordnung sich ausdrücken lassen? Diese Annahme ist für uns nicht eine nebensächliche, welche wir auch fallen lassen könnten; mit ihr fiele unsere Mechanik; denn es fragt sich, ob auf Verbindungen allgemeinster Art unser Grundgesetz anwendbar bliebe. Und doch sind Verbindungen allgemeinerer Art nicht nur vorstellbar, sie werden auch in der gewöhnlichen Mechanik ohne Bedenken zugelassen. Dort hindert uns nichts, die Bewegung eines Punktes zu untersuchen, dessen Bahn der einzigen Beschränkung unterworfen ist, daſs sie mit einer gegebenen Ebene einen gegebenen Winkel bilde, oder daſs ihr Krümmungshalbmesser beständig einer gegebenen anderen Länge proportional sei. Diese Bedingungen fallen schon nicht mehr unter diejenigen, welche unsere Mechanik zuläſst. Woher nehmen wir aber die Gewiſsheit, daſs sie auch durch die Natur der Dinge ausgeschlossen seien? Wir können erwidern, daſs man vergeblich versuche, diese und ähnliche Verbindungen durch ausführbare Mechanismen zu verwirklichen und wir können uns in dieser Ansicht auf die gewaltige Autorität von Helmholtz's berufen. Aber in jedem Beispiel können Möglichkeiten übersehen worden sein, und noch so viele Beispiele würden nicht hinreichen, die allgemeine Behauptung zu erweisen. Mit mehr Recht können wir, wie mir scheint, als Grund unserer Überzeugung anführen, daſs alle Verbindungen eines Systems, welche aus dem Rahmen unserer Mechanik heraustreten, in dem einen oder in dem andern Sinne eine unstetige Aneinanderreihung seiner möglichen Bewegungen bedeuten würden, daſs es aber in der That eine Erfahrung allgemeinster Art sei, daſs die Natur im Unendlichkleinen überall und in jedem Sinne Stetigkeit aufweise, eine Erfahrung, die sich in dem alten Satze „natura non facit saltus“, zu fester Überzeugung verdichtet hat. Ich habe des-

halb auch im Texte Wert darauf gelegt, die zugelassenen Verbindungen allein durch ihre Stetigkeit zu definieren, und ihre Eigenschaft, sich durch Gleichungen bestimmter Form darstellen zu lassen, erst aus jener abzuleiten. Eigentliche Sicherheit wird indessen auch so nicht erlangt. Denn die Unbestimmtheit jenes alten Satzes läfst es zweifelhaft erscheinen, ob die Grenzen seiner berechtigten Tragweite hinreichend feststehen und wieweit er überhaupt das Ergebnis wirklicher Erfahrung, wieweit das Ergebnis willkürlicher Voraussetzung ist. Am gewissenhaftesten wird es daher sein, zuzugeben, dafs unsere Annahme über die zulässigen Verbindungen den Charakter einer versuchsweise angenommenen Hypothese trage. Ganz ähnlich liegen die Dinge in betreff der dynamischen Erklärung der Kräfte. Wir können allerdings zeigen, dafs gewisse Klassen verborgener Bewegungen Kräfte erzeugen, welche, wie die Fernkräfte der Natur, sich mit beliebiger Annäherung als Ableitungen von Kräftefunktionen darstellen lassen. Es stellt sich auch heraus, dafs die Formen dieser Kräftefunktionen sehr allgemeiner Natur sein können und wir leiten in der That gar keine Einschränkungen derselben ab. Aber auf der anderen Seite bleiben wir auch den Beweis schuldig, dafs sich jede beliebige Form der Kräftefunktionen erzielen läfst und es bleibt daher die Frage offen, ob nicht etwa gerade eine der in der Natur vorkommenden Formen einer solchen Erklärungsweise sich entzieht. Es bleibt auch hier abzuwarten, ob die Zeit unsere Annahme widerlegen oder durch das Ausbleiben einer Widerlegung mehr und mehr wahrscheinlich machen wird. Ein gutes Vorzeichen können wir darin sehen, dafs die Ansicht vieler ausgezeichneter Physiker sich der Hypothese immer mehr zuneigt. Ich erinnere nochmals an die Wirbeltheorie der Atome von Lord Kelvin, welche uns ein Bild des materiellen Weltganzen vorführt, wie es mit den Prinzipien unserer Mechanik in vollem Einklange ist. Und doch verlangt unsere Mechanik keineswegs eine so grofse Einfachheit und Beschränkung der Voraussetzungen, wie sie sich Lord Kelvin auferlegt hat. Wir würden unsere Grundsätze noch nicht verlassen, wenn wir annähmen, dafs die Wirbel um starre oder um biegsame, aber unausdehnbare Kerne kreisten und auch das welterfüllende Medium könnten wir anstatt der blofsen Inkom-

pressibilität viel verwickelteren Bedingungen unterwerfen, deren allgemeinste Form noch zu untersuchen wäre. Es erscheint also keineswegs ausgeschlossen, dafs wir mit den von unserer Mechanik zugelassenen Hypothesen zur Erklärung der Erscheinungen auch ausreichen.

Einen Vorbehalt müssen wir indessen hier einschalten. Es ist gewifs eine gerechtfertigte Vorsicht, wenn wir im Texte das Gebiet unserer Mechanik ausdrücklich beschränken auf die unbelebte Natur und die Frage vollkommen offen lassen, wie weit sich ihre Gesetze darüber hinaus erstrecken. In Wahrheit liegt die Sache ja so, dafs wir weder behaupten können, dafs die inneren Vorgänge der Lebewesen denselben Gesetzen folgen, wie die Bewegungen der leblosen Körper, noch auch behaupten können, dafs sie andern Gesetzen folgen. Der Anschein aber und die gewöhnliche Meinung spricht für einen grundsätzlichen Unterschied. Und dasselbe Gefühl, welches uns antreibt, aus der Mechanik der leblosen Welt jede Andeutung einer Absicht, einer Empfindung, der Lust und des Schmerzes, als fremdartig auszuscheiden, dasselbe Gefühl läfst uns Bedenken tragen, unser Bild der belebten Welt dieser reicheren und bunteren Vorstellungen zu berauben. Unser Grundgesetz, vielleicht ausreichend die Bewegung der toten Materie darzustellen, erscheint wenigstens der flüchtigen Schätzung zu einfach und zu beschränkt, um die Mannigfaltigkeit selbst des niedrigsten Lebensvorganges wiederzugeben. Dafs dem so ist, scheint mir nicht ein Nachteil, sondern eher ein Vorzug unseres Gesetzes. Eben weil es uns gestattet das Ganze der Mechanik umfassend zu überblicken, zeigt es uns auch die Grenzen dieses Ganzen. Eben weil es uns nur eine Thatsache giebt, ohne derselben den Schein der Notwendigkeit beizulegen, läfst es uns erkennen, dafs alles auch anders sein könnte. Vielleicht wird man solche Erörterungen an dieser Stelle für überflüssig halten. In der That ist man auch nicht gewöhnt, sie in der gewöhnlichen Darstellung der Mechanik bei den Elementen behandelt zu sehen. Aber dort gewährt die völlige Unbestimmtheit der eingeführten Kräfte noch einen weiten Spielraum. Man behält sich stillschweigend vor, später etwa einen Gegensatz zwischen den Kräften der belebten und

der unbelebten Natur festzustellen. In unserer Darstellung ist das betrachtete Bild von vornherein so scharf umrissen, dafs sich nachträglich kaum mehr tief eingreifende Einteilungen werden vornehmen lassen. Wollen wir daher die aufgeworfene Frage nicht überhaupt ignorieren, so müssen wir gleich im Eingang Stellung zu derselben nehmen.

Über die Zweckmäfsigkeit unseres dritten Bildes können wir uns ziemlich kurz fassen. Wir können aussagen, dafs dieselbe, wie der Inhalt des Buches zeigen soll, nach Deutlichkeit und Einfachheit etwa derjenigen gleichkommt, welche wir dem zweiten Bilde zusprachen, und dafs wir dieselben Vorzüge, welche wir dort rühmten, auch hier hervorheben können. Allerdings ist der Umkreis der zugelassenen Möglichkeiten hier nicht ganz so eng gezogen wie dort, da diejenigen starren Verbindungen, deren Fehlen wir dort hervorhoben, hier durch die Grundannahmen nicht ausgeschlossen sind. Aber diese Erweiterung entspricht der Natur und ist daher ein Vorzug; auch hindert sie nicht, die allgemeinen Eigenschaften der natürlichen Kräfte herzuleiten, in welchen die Bedeutung des zweiten Bildes lag. Einfachheit besteht hier wie dort zunächst im Sinne der physikalischen Anwendung. Auch hier können wir unsere Betrachtung auf beliebige der Beobachtung zugängliche Merkmale der materiellen Systeme beschränken, und aus ihren vergangenen Veränderungen durch Anwendung des Grundgesetzes die zukünftigen ableiten, ohne dafs wir nötig hätten, die Lagen aller Einzelmassen des Systems zu kennen und ohne dafs wir nötig hätten, diese Unkenntnis durch willkürliche, einflufslose und wahrscheinlich falsche Hypothesen zu überdecken und zu bemänteln. Im Gegensatz zum zweiten Bilde besitzt aber unser drittes Einfachheit auch in dem Sinne, dafs sich seine Vorstellungen der Natur so anschmiegen, dafs die wesentlichen Beziehungen der Natur durch einfache Beziehungen zwischen den Begriffen wiedergegeben werden. Das zeigt sich nicht nur im Grundgesetze selbst, sondern auch in den zahlreichen allgemeinen Folgerungen desselben, welche den sogenannten Prinzipien der Mechanik entsprechen. Es mufs allerdings zugegeben werden, dafs diese Einfachheit nur eintritt, so lange wir es

mit vollständig bekannten Systemen zu thun haben, und dafs sie wieder verschwindet, sobald verborgene Massen sich einmischen. Aber auch in diesen Fällen liegt dann der Grund der Verwickelung klar auf der Hand; wir verstehen, dafs der Verlust der Einfachheit nicht in der Natur, sondern in unserer mangelhaften Kenntnis derselben beruht; wir begreifen, dafs die eintretenden Komplikationen nicht allein eine mögliche, sondern die notwendige Folge unserer besonderen Voraussetzungen sind. Auch das mufs zugegeben werden, dafs die Mitwirkung verborgener Massen, welche vom Standpunkte unserer Mechanik aus der entlegene und besondere Fall ist, dafs diese Mitwirkung gerade der gewöhnliche Fall der Probleme des täglichen Lebens und der Technik ist. Daher ist es auch nützlich, hier nochmals zu betonen, dafs wir von einer Zweckmäfsigkeit überhaupt nur geredet haben in einem besonderen Sinne, nämlich im Sinne eines Geistes, welcher ohne Rücksicht auf die zufällige Stellung des Menschen in der Natur das Ganze unserer physikalischen Erkenntnis objectiv zu umfassen und in einfacher Weise darzustellen sucht; dafs wir aber keineswegs redeten von einer Zweckmäfsigkeit im Sinne der praktischen Anwendung und der Bedürfnisse des Menschen. In betreff dieser letzteren kann die für sie ausdrücklich erdachte gewöhnliche Darstellung der Mechanik wohl niemals durch eine zweckmäfsigere ersetzt werden. Zu dieser Darstellung verhält sich die von uns hier vorgeführte etwa wie die systematische Grammatik einer Sprache zu einer Grammatik, welche den Lernenden möglichst bald erlauben soll, sich über die Notwendigkeiten des täglichen Lebens zu verständigen. Man weifs wie verschieden die Anforderungen an beide sind und wie verschieden ihre Anordnungen ausfallen müssen, wenn beide ihrem Zweck so genau wie möglich entsprechen sollen.

Blicken wir zum Schlusse noch einmal zurück auf die drei Bilder der Mechanik, welche wir vorgeführt haben und suchen wir einen letzten uud endgültigen Vergleich zwischen ihnen anzustellen. Das zweite Bild lassen wir nach dem, was wir gesagt haben, fallen. Das erste und dritte Bild wollen wir gleichstellen in Bezug auf die Zulässigkeit, indem wir annehmen, dafs dem ersten Bilde eine in logischer Hinsicht vollständig befriedigende Gestalt gegeben sei, wie wir angenommen haben, dafs sie gegeben werden könne. Wir wollen beide Bilder auch gleichstellen in Bezug auf die Zweckmäfsigkeit, indem wir annehmen, dafs man das erste Bild durch geeignete Zusätze ergänzt habe und indem wir annehmen, dafs die nach verschiedener Richtung gehenden Vorzüge einander das Gleichgewicht halten. Dann bleibt als einziger Wertmafsstab die Richtigkeit der Bilder, welche durch die Gewalt der Dinge bestimmt ist, und welche nicht in unserer Willkür liegt. Und hier machen wir nun die wichtige Bemerkung, dafs nur das eine oder das andere jener Bilder, nicht aber beide gleichzeitig richtig sein können. Denn suchen wir die wesentlichen Beziehungen beider Darstellungen auf ihren kürzesten Ausdruck zu bringen, so können wir sagen: Das erste Bild nehme als letzte konstante Elemente in der Natur die relativen Beschleunigungen der Massen gegen einander an, aus diesen leite sie gelegentlich angenähert, aber auch nur angenähert feste Verhältnisse zwischen den Lagen ab. Das dritte Bild aber nehme als die streng unveränderlichen Elemente der Natur feste Verhältnisse zwischen den Lagen an, aus diesen leite sie, wo die Erscheinungen es erfordern, angenähert, aber auch nur angenähert unveränderliche relative Beschleunigungen zwischen den Massen her. Könnten wir nun die Bewegungen der Natur nur genau genug erkennen, so wüfsten wir sogleich, ob in ihnen die relative Beschleunigung oder ob die relativen Lagenverhältnisse der Massen oder ob beide nur angenähert unveränderlich sind. Wir wüfsten dann auch sogleich, welche von unseren beiden Annahmen falsch ist oder ob beide falsch sind, denn richtig können nicht beide gleichzeitig sein. Die gröfste Einfachheit steht auf seiten des dritten Bildes. Was uns zwingt, gleichwohl zunächst zu Gunsten des ersten zu

entscheiden, ist der Umstand, dafs wir wirklich in den Fernkräften relative Beschleunigungen aufweisen können, welche bis an die Grenze unserer Beobachtung unveränderlich scheinen, während alle festen Verbindungen zwischen den Lagen der greifbaren Körper schon innerhalb der Wahrnehmung unserer Sinne sich schnell nur angenähert als konstant erweisen. Aber dies Verhältnis ändert sich zu Gunsten des dritten Bildes, sobald die verfeinerte Erkenntnis uns etwa zeigt, dafs die Annahme unveränderlicher Fernkräfte nur eine erste Annäherung an die Wahrheit liefert, welcher Fall in dem Gebiete der elektrischen und magnetischen Kräfte bereits eingetreten ist. Und die Wage schlägt vollends über zu Gunsten des dritten Bildes, sobald eine zweite Annäherung an die Wahrheit dadurch erzielt werden kann, dafs man die vermeintliche Wirkung der Fernkräfte zurückführt auf Bewegungsvorgänge in einem raumerfüllenden Mittel, dessen kleinste Teile starren Verbindungen unterliegen, ein Fall der gleichfalls in dem erwähnten Gebiete nahezu verwirklicht erscheint. Hier also liegt das Feld, auf welchem auch der Entscheidungskampf zwischen den verschiedenen von uns betrachteten Grundannahmen der Mechanik ausgefochten werden mufs. Die Entscheidung selbst aber setzt voraus, dafs vorher die vorhandenen Möglichkeiten nach allen Richtungen hin gründlich erwogen seien. Sie nach einer besonderen Richtung zu entwickeln, ist der Zweck der vorliegenden Arbeit. Diese Arbeit ist also notwendig gewesen, auch wenn es noch lange dauern sollte, bis eine Entscheidung möglich ist, und auch dann, wenn diese Entscheidung schliefslich zu Ungunsten des hier ausführlich entwickelten Bildes ausfallen sollte.

ERSTES BUCH.

ZUR GEOMETRIE UND KINEMATIK DER MATERIELLEN SYSTEME.

Vorbemerkung. Den Überlegungen des ersten Buches bleibt die Erfahrung völlig fremd. Alle vorgetragenen Aussagen sind Urteile a priori im Sinne KANT's. Sie beruhen auf den Gesetzen der inneren Anschauung und den Formen der eigenen Logik des Aussagenden und haben mit der äufseren Erfahrung desselben keinen anderen Zusammenhang, als ihn diese Anschauungen und Formen etwa haben. 1

Abschnitt 1. Zeit, Raum, Masse.

Erläuterung. Die Zeit des ersten Buches ist die Zeit unserer inneren Anschauung. Sie ist daher eine Gröfse, von deren Änderung die Änderungen der übrigen betrachteten Gröfsen abhängig gedacht werden können, während sie selbst stets unabhängig veränderlich ist. 2

Der Raum des ersten Buches ist der Raum unserer Vorstellung. Er ist also der Raum der EUKLID'schen Geometrie mit allen Eigenschaften, welche diese Geometrie ihm zuspricht. Es ist gleichgültig für uns, ob man diese Eigenschaften ansieht als gegeben durch die Gesetze der inneren Anschauung, oder als denknotwendige Folgen willkürlicher Definitionen.

Die Masse des ersten Buches wird eingeführt durch eine Definition.

3 **Definition 1.** Ein Massenteilchen ist ein Merkmal, durch welches wir einen bestimmten Punkt des Raumes zu einer gegebenen Zeit eindeutig zuordnen einem bestimmten Punkte des Raumes zu jeder anderen Zeit.

Jedes Massenteilchen ist unveränderlich und unzerstörbar. Die durch dasselbe Massenteilchen gekennzeichneten Punkte des Raumes zu zwei verschiedenen Zeiten fallen zusammen, wenn die Zeiten zusammenfallen. Diese Bestimmungen sind bereits in der Definition enthalten, wenn deren Wortlaut richtig gefafst wird.

4 **Definition 2.** Die Zahl der Massenteilchen in einem beliebigen Raume, verglichen mit der Zahl der Massenteilchen, welche sich in einem festgesetzten Raume zu festgesetzter Zeit finden, heifst die in dem ersteren Raume enthaltene Masse.

Die Zahl der Massenteilchen in dem Vergleichsraume kann und soll unendlich grofs gewählt werden. Die Masse des einzelnen Massenteilchens wird alsdann nach der Definition unendlich klein. Die Masse in einem beliebigen Raume kann daher jeden rationalen oder irrationalen Wert annehmen.

5 **Definition 3.** Eine endliche oder unendlich kleine Masse, vorgestellt in einem unendlich kleinen Raume, heifst ein materieller Punkt.

Ein materieller Punkt besteht also aus einer beliebigen Anzahl mit einander verbundener Massenteilchen. Diese Zahl soll stets unendlich grofs sein, was dadurch erreicht werden kann, dafs wir uns die Massenteilchen von höherer Ordnung unendlich klein denken, als die etwa betrachteten materiellen Punkte von verschwindender Masse. Die Massen der materiellen Punkte, insbesondere auch die Massen der unendlich kleinen materiellen Punkte können darnach in jedem beliebigen rationalen oder irrationalen Verhältnis zu einander stehen.

6 **Definition 4.** Eine Anzahl gleichzeitig betrachteter materieller Punkte heifst ein System materieller Punkte, oder kurz ein System. Die Summe der Massen der einzelnen Punkte ist nach 4 die Masse des Systems.

Ein endliches System besteht also aus einer endlichen Zahl endlicher oder aus einer unendlichen Anzahl unendlich

kleiner materieller Punkte oder aus beiden. Stets ist es erlaubt, das System materieller Punkte anzusehen als zusammengesetzt aus einer unendlichen Anzahl von Massenteilchen.

Anmerkung 1. Im folgenden werden wir das endliche 7
System stets behandeln als bestehend aus einer endlichen Zahl endlicher materieller Punkte. Da wir aber keine obere Grenze festsetzen für die Zahl derselben und keine untere für ihre Masse, so umfassen unsere allgemeinen Aussagen als besonderen Fall auch den Fall, dafs das System unendlich viele unendlich kleine materielle Punkte enthält. Auf die Besonderheiten, welche die analytische Behandlung dieses Falles nötig macht, werden wir indessen nicht eingehen.

Anmerkung 2. Der materielle Punkt kann angesehen 8
werden als ein besonderer Fall und als das einfachste Beispiel eines Systems materieller Punkte.

Abschnitt 2. Lagen und Verrückungen der Punkte und Systeme.

Lage.

Definition 1. Der Punkt des Raumes, welcher durch 9
ein gewisses Massenteilchen zu einer gewissen Zeit gekennzeichnet ist, wird die Lage des Massenteilchens zu jener Zeit genannt. Lage eines materiellen Punktes heifst die gemeinsame Lage seiner Massenteilchen.

Definition 2. Die gleichzeitig vorgestellte Gesamtheit 10
der Lagen aller Punkte eines Systems heifst die Lage des Systems.

Definition 3. Jede beliebige Lage eines materiellen 11
Punktes im unendlichen Raume heifst eine geometrisch denk-

bare oder kurz eine denkbare Lage des Punktes. Die Gesamtheit irgend welcher denkbaren Lagen der Punkte eines Systems heifst eine denkbare Lage des Systems.

Zu einer jeden Zeit können sich unterscheiden zwei Massenteilchen durch ihre Lage, zwei materielle Punkte durch ihre Masse und ihre Lage, zwei Systeme materieller Punkte durch Zahl, Masse und Lage ihrer Punkte. Nach anderen Richtungen als diesen aber können sich auf Grund unserer bisherigen Definitionen Massenteilchen, materielle Punkte, Systeme materieller Punkte nicht unterscheiden.

12 **Analytische Darstellung der Lage.** a) des Punktes. Die Lage eines materiellen Punktes kann analytisch dargestellt werden durch die Angabe der drei rechtwinklig-geradlinigen cartesischen Koordinaten desselben in Bezug auf ein ruhendes, festes Axensystem. Diese Koordinaten sollen dauernd mit $x_1\, x_2\, x_3$ bezeichnet werden. Jeder denkbaren Lage des Punktes entspricht ein eindeutig bestimmtes Wertsystem dieser Koordinaten, und umgekehrt jedem willkürlich gewählten Wertsystem der Koordinaten eine eindeutig bestimmte denkbare Lage des Punktes.

Anstatt durch seine rechtwinkligen Koordinaten kann die Lage eines Punktes auch bestimmt werden durch irgend welche r Gröfsen $p_1 \dots p_\varrho \dots p_r$, sobald durch Übereinkunft bestimmte Wertsysteme dieser Gröfsen bestimmten Lagen stetig zugeordnet sind und umgekehrt. Die rechtwinkligen Koordinaten sind alsdann Funktionen dieser Gröfsen, und umgekehrt. Die Gröfsen p_ϱ bezeichnen wir als allgemeine Koordinaten des Punktes. Ist $r > 3$, so müssen zwischen den p_ϱ aus geometrischen Gründen $r - 3$ Gleichungen bestehen, welche gestatten, die p_ϱ als Funktionen dreier unabhängiger Gröfsen, z. B. der $x_1\, x_2\, x_3$, darzustellen. Es soll indessen eine Abhängigkeit der Koordinaten von einander aus rein geometrischen Gründen ausgeschlossen sein, und deshalb stets vorausgesetzt werden, dafs $r \gtreqless 3$ sei. Ist $r < 3$, so werden nicht alle denkbaren Lagen des Punktes durch Wertsysteme der p_ϱ dargestellt, sondern nur ein Teil derselben. Die durch die p_ϱ nicht dargestellten Lagen sollen bei Benutzung der p_ϱ dadurch selbst als von der Betrachtung ausgeschlossen gelten.

Analytische Darstellung. b) des Systems. Die Lage 13
eines Systems von n materiellen Punkten kann analytisch dargestellt werden durch Angabe der $3n$ rechtwinkligen Koordinaten der Punkte des Systems. Diese Koordinaten sollen dauernd bezeichnet werden mit $x_1 \dots x_\nu \dots x_{3n}$, wobei $x_1\, x_2\, x_3$ die Koordinaten des ersten Punktes, $x_{3\mu-2}\, x_{3\mu-1}\, x_{3\mu}$ die entsprechend gerichteten Koordinaten des μten Punktes bedeuten mögen. Diese $3n$ Koordinaten x_ν bezeichnen wir auch kurz als die rechtwinkligen Koordinaten des Systems. Jeder denkbaren Lage des Systems entspricht ein eindeutig bestimmtes Wertsystem seiner rechtwinkligen Koordinaten, und umgekehrt jedem willkürlich gewählten Wertsystem der x_ν eine eindeutig bestimmte denkbare Lage des Systems.

Anstatt durch die rechtwinkligen Koordinaten können wir die Lage eines Systems auch bestimmen durch irgendwelche r Gröfsen $p_1 \dots p_\varrho \dots p_r$, sobald durch Übereinkunft bestimmte Wertsysteme dieser Gröfsen bestimmten Lagen stetig zugeordnet sind und umgekehrt. Die rechtwinkligen Koordinaten sind dadurch Funktionen dieser Gröfsen, und umgekehrt. Die Gröfsen p_ϱ bezeichnen wir als allgemeine Koordinaten des Systems. Ist $r > 3n$, so müssen zwischen den p_ϱ aus geometrischen Gründen $r - 3n$ Gleichungen bestehen. Wir wollen indessen ausschliefsen, dafs zwischen den Koordinaten aus rein geometrischen Gründen eine Abhängigkeit bestehe, und es sei daher stets $r \leqq 3n$. Ist $r < 3n$, so werden nicht alle denkbaren Lagen des Systems durch Wertsysteme der p_ϱ dargestellt, sondern nur ein Teil derselben. Die durch die p_ϱ nicht dargestellten Lagen sollen bei Benutzung der Koordinaten p_ϱ dadurch selbst als von der Betrachtung ausgeschlossen gelten.

Konfiguration und absolute Lage.

Definition 1. Die Gesamtheit der gegenseitigen Lagen 14
der Punkte eines Systems heifst die Konfiguration des Systems.

Die Konfiguration des Systems und die absolute Lage der Konfiguration im Raume bestimmen zusammen die Lage des Systems.

15 **Definition 2.** Konfigurationskoordinate nennen wir jede Koordinate des Systems, deren Wert nicht geändert werden kann, ohne dafs dadurch die Konfiguration des Systems sich änderte.

Ob eine bestimmte Koordinate Konfigurationskoordinate ist oder nicht, hängt also nicht ab von der Wahl der übrigen gleichzeitig benutzten Koordinaten.

16 **Definition 3.** Koordinate der absoluten Lage heifst jede Koordinate des Systems, durch deren Änderung die Konfiguration nicht geändert werden kann, solange die übrigen Koordinaten des Systems sich nicht ändern.

Ob eine bestimmte Koordinate Koordinate der absoluten Lage ist oder nicht, hängt also ab von der Wahl der übrigen gleichzeitig benutzten Koordinaten.

Folgerungen.

17 1. Eine Koordinate kann nicht zugleich Konfigurationskoordinate und Koordinate der absoluten Lage sein. Dagegen kann und wird im allgemeinen eine beliebig herausgegriffene Koordinate weder Konfigurationskoordinate noch auch Koordinate der absoluten Lage sein.

18 2. Sobald $n > 3$, können $3n$ von einander unabhängige Koordinaten aller Lagen auf mannigfaltige Art so gewählt werden, dafs sich unter ihnen bis zu $3n - 6$ Konfigurationskoordinaten finden, aber auf keine Weise so, dafs sich mehr als $3n - 6$ Konfigurationskoordinaten unter ihnen finden.

Denn wählen wir unter die Koordinaten die 3 Abstände dreier beliebiger Punkte des Systems von einander und die $3(n - 3)$ Abstände der übrigen von jenen, so haben wir bereits $3n - 6$ Konfigurationskoordinaten, und je $3n - 6$ verschiedene Funktionen jener Abstände werden ebenfalls $3n - 6$ Konfigurationskoordinaten des Systems sein. Weniger Konfigurationskoordinaten können vorhanden sein; denn es sind z. B. gar keine vorhanden, wenn wir die $3n$ rechtwinkligen Koordinaten benutzen. Mehr Konfigurationskoordinaten aber können sich unter unabhängigen Koordinaten nicht finden;

denn wären unter beliebigen Koordinaten mehr als $3n - 6$ Konfigurationskoordinaten vorhanden, so liefsen sich die letzteren als Funktionen jener $3n - 6$ Abstände darstellen, wären also nicht von einander unabhängig.

3. Sobald $n > 3$, können $3n$ unabhängige Koordinaten aller denkbaren Lagen eines Systems auf mannigfaltige Art 19
so gewählt werden, dafs sich unter ihnen bis zu 6, aber nicht mehr als 6 Koordinaten der absoluten Lage finden.

Denn wählen wir die Koordinaten so, dafs sich unter ihnen $3n - 6$ Konfigurationskoordinaten finden, und fügen hinzu 6 beliebige Koordinaten, etwa 6 der rechtwinkligen Koordinaten des Systems, so sind die letzteren eo ipso Koordinaten der absoluten Lage, da keine Änderung derselben die Konfiguration ändert, solange die übrigen festgehalten werden. Weniger als 6 Koordinaten der absoluten Lage können vorhanden sein; denn es sind z. B. keine vorhanden, wenn wir die rechtwinkligen Koordinaten des Systems benutzen. Mehr als 6 aber können nicht vorhanden sein; denn wären für eine bestimmte Wahl der Koordinaten mehr vorhanden, so wären alle denkbaren Konfigurationen bestimmt durch die übrigen weniger als $3n - 6$ Koordinaten, es liefsen sich also für das System überhaupt nicht $3n - 6$ von einander unabhängige Konfigurationskoordinaten angeben, was gegen Folgerung 2 wäre.

4. Sind $3n$ unabhängige Koordinaten eines Systems 20
von n Punkten so gewählt, dafs sich unter ihnen $3n - 6$ Konfigurationskoordinaten finden, so sind die übrigen 6 notwendig Koordinaten der absoluten Lage. Sind jene $3n$ Koordinaten so gewählt, dafs sich unter ihnen 6 Koordinaten der absoluten Lage finden, so sind die übrigen $3n - 6$ notwendig Konfigurationskoordinaten.

Denn fände sich unter den letzteren $3n - 6$ Koordinaten auch nur eine, welche geändert werden könnte ohne die Konfiguration zu ändern, so wäre die absolute Lage der Konfiguration bestimmt durch mehr als 6 unabhängige Koordinaten, was nicht möglich.

5. Als Koordinate der absoluten Lage kann jede Gröfse 21
benutzt werden, deren Änderung eine Änderung in der Lage

des Systems zur Folge hat, und welche nicht eine Konfigurationskoordinate ist. Sechs beliebige Gröfsen, welche diese Eigenschaften besitzen und von einander unabhängig sind, können als Koordinaten der absoluten Lage gewählt werden und werden zu Koordinaten der absoluten Lage dadurch, dafs ihnen keine anderen Gröfsen als Koordinaten hinzugefügt werden, als solche, welche die Eigenschaft von Konfigurationskoordinaten haben.

Endliche Verrückungen

a) der Punkte.

22 **Definition 1.** Den Übergang eines materiellen Punktes aus einer Anfangslage in eine Endlage ohne Rücksicht auf die Zeit und die Art des Überganges nennen wir eine Verrückung des Punktes aus der Anfangs- in die Endlage.

Die Verrückung eines Punktes ist also vollständig bestimmt durch ihre Anfangs- und ihre Endlage. Sie ist ebenfalls vollständig gegeben durch ihre Anfangslage, ihre Richtung und ihre Gröfse.

23 **Anmerkung 1.** Die Gröfse der Verrückung eines Punktes ist gleich der Entfernung seiner Endlage von seiner Anfangslage. Sind die x_ν die rechtwinkligen Koordinaten der Anfangslage, die x'_ν die rechtwinkligen Koordinaten der Endlage, so ist die Gröfse s' der Verrückung die positive Wurzel der Gleichung:

$$s'^2 = \sum_1^3{}_\nu \, (x'_\nu - x_\nu)^2 \quad .$$

24 **Anmerkung 2.** Die Richtung einer Verrückung ist die Richtung einer Geraden, welche von der Anfangslage der Verrückung zu ihrer Endlage gezogen wird. Haben s', x_ν, x'_ν die Bedeutung wie vorher, und sind die x^0_ν, x''_ν, s'' die Koordinaten der Anfangs-, der Endlage und die Länge einer zweiten

Verrückung, so ist der Winkel oder Richtungsunterschied s',s'' beider Verrückungen gegeben durch die Gleichung:

$$s's''\cos s',s'' = \sum_1^3 {}_\nu (x'_\nu - x_\nu)(x''_\nu - x^0_\nu) \quad . \qquad \text{a)}$$

Denn die Betrachtung des Dreiecks aus den beiden Längen s' und s'' als Seiten, und dem Winkel s',s'' als eingeschlossenem Winkel liefert uns die Gleichung:

$$s'^2 + s''^2 - 2s's''\cos s',s'' = \sum_1^3 {}_\nu \left[(x'_\nu - x_\nu) - (x''_\nu - x^0_\nu)\right]^2 \quad , \qquad \text{b)}$$

aus welcher zusammen mit 23 Gleichung **a)** folgt.

Definition 2. Zwei Verrückungen eines Punktes heifsen identisch, wenn sie Anfangs- und Endlage gemein haben; zwei Verrückungen eines Punktes heifsen gleich, wenn sie Richtung und Gröfse gemein haben; zwei Verrückungen heifsen gleichgerichtet oder parallel, wenn sie die Richtung gemein haben. 25

Zwischenbemerkung. Bezeichnen $x_1 \ldots\ldots x_k$ die k geradlinigen, rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes in einem Raum von k Dimensionen, $x'_1 \ldots\ldots x'_k$ die Koordinaten eines zweiten Punktes, so erweitert die an dieser Stelle eingeschaltete Festsetzung, dafs die Entfernung beider Punkte die positive Wurzel der Gleichung 26

$$s'^2 = \sum_1^k {}_\nu (x'_\nu - x_\nu)^2$$

sei, den ganzen folgenden Inhalt der Untersuchung und damit die ganze Mechanik auf den Raum von k Dimensionen, ohne dafs eine Änderung auch nur des Wortlautes nötig wäre, von Nebendingen abgesehen. Doch soll von dieser Bemerkung kein Gebrauch gemacht werden, sondern es soll gemäfs der ersten Festsetzung stets nur von dem Raum der Euklid'schen Geometrie die Rede sein.

b) der Systeme.

27 **Definition.** Der Übergang eines Systems materieller Punkte aus einer Anfangslage in eine Endlage ohne Rücksicht auf die Zeit und ohne Rücksicht auf die Art des Überganges heifst eine Verrückung des Systems aus der Anfangs- in die Endlage.

Die Verrückung eines Systems ist also vollständig gegeben durch ihre Anfangs- und ihre Endlage. Sie ist ebenfalls vollständig bestimmt, wenn ihre Anfangslage und diejenigen Merkmale gegeben sind, welche wir als ihre Richtung und Gröfse bezeichnen.

28 **Hülfsbezeichnung.** Quadratischen Mittelwert einer Reihe von Gröfsen nennen wir die positive Quadratwurzel des arithmetischen Mittelwertes der Quadrate der einzelnen Gröfsen.

29 **Definition a.** Gröfse der Verrückung eines Systems heifst der quadratische Mittelwert aus der Gröfse der Verrückungen seiner sämtlichen Massenteilchen.

Die Gröfse der Verrückung, welche eine Lage eines Systems in eine andere überführt, heifst auch die Entfernung oder der Abstand beider Lagen von einander. Die Gröfse einer Verrückung wird auch als die Länge derselben bezeichnet.

30 **Bemerkung.** Die Entfernung zweier Lagen eines Systems von einander ist unabhängig definiert von der Form der analytischen Darstellung, insbesondere von der Wahl der Koordinaten des Systems.

31 **Aufgabe.** Die Entfernung zweier Lagen eines Systems durch die rechtwinkligen Koordinaten desselben darzustellen.

Es sei n die Zahl der materiellen Punkte des Systems. Es sei x_ν der Wert einer der rechtwinkligen Koordinaten des Systems vor der Verrückung, x'_ν der Wert derselben Koordinate nach der Verrückung. Die Koordinate x_ν ist zugleich Koordinate eines der Punkte des Systems; es sei die Masse dieses Punktes m_ν. ν läuft von 1 bis $3n$, aber nicht alle m_ν sind ungleich, sondern es ist für jedes μ von 1 bis n

$$m_{3\mu-2} = m_{3\mu-1} = m_{3\mu} \quad .$$

Ist nun etwa η die Zahl der Massenteilchen in der Masseneinheit, so enthält die Masse m_ν $m_\nu \eta$ Massenteilchen, und die Gesamtmasse m des Systems $m\eta$ derselben. Berechnet man mit diesen Bezeichnungen den quadratischen Mittelwert s' der Verrückungen aller Massenteilchen, so folgt für denselben die positive Wurzel der Gleichung:

$$m s'^2 = \sum_1^{3n} {}^\nu m_\nu (x'_\nu - x_\nu)^2 \qquad \text{a)}$$

und diese Wurzel ist also die gesuchte Entfernung. Übrigens ist

$$m = \tfrac{1}{3} \sum_1^{3n} {}^\nu m_\nu \quad . \qquad \text{b)}$$

Lehrsatz. Die Entfernung zweier Lagen eines Systems von einander ist stets kleiner als die Summe der Entfernungen beider Lagen von einer dritten. 32

Es seien nämlich die x'_ν, x''_ν, x'''_ν die rechtwinkligen Koordinaten der Lagen 1, 2, 3; es seien s_{12}, s_{13}, s_{23} die Entfernungen derselben von einander. Wird für den Augenblick zur Abkürzung gesetzt:

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\,(x'''_\nu - x'_\nu) = a_\nu \quad , \qquad \sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\,(x'''_\nu - x''_\nu) = b_\nu \quad ,$$

so wird

$$s_{13}^2 = \sum_1^{3n} {}^\nu a_\nu^2 \quad , \qquad s_{23}^2 = \sum_1^{3n} {}^\nu b_\nu^2 \quad , \qquad s_{12}^2 = \sum_1^{3n} {}^\nu (a_\nu - b_\nu)^2 \quad .$$

Gesetzt nun, es wäre $s_{12} > s_{13} + s_{23}$, so wäre durch Quadrierung zu erhalten $s_{12}^2 - s_{13}^2 - s_{23}^2 > 2 s_{13} s_{23}$, also durch nochmalige Quadrierung:

$$4 s_{13}^2 s_{23}^2 - (s_{12}^2 - s_{13}^2 - s_{23}^2)^2 < 0 \quad .$$

Dies ist aber nicht möglich, denn die linke Seite wird durch Einsetzen der Werte für die s in die Form gebracht:

$$4 \sum_1^{3n} {}^\nu \sum_1^{3n} {}^\mu (a_\nu b_\mu - a_\mu b_\nu)^2 \quad ,$$

ist also als Summe von Quadraten notwendig positiv. Da nun also die entgegengesetzte Vermutung unmöglich war, so muſs stets sein:

$$s_{12} \leqq s_{13} + s_{23} \quad .$$

33 **Folgerung.** Aus den drei Entfernungen dreier beliebiger Lagen eines Systems von einander als Seiten ist stets ein ebenes Dreieck zu zeichnen möglich.

34 **Definition b.** Richtungsunterschied zwischen zwei Verrückungen eines Systems aus gleicher Anfangslage heiſst der eingeschlossene Winkel eines ebenen Dreiecks, in welchem die Längen der beiden Verrückungen die einschlieſsenden und die Entfernung ihrer Endpunkte die gegenüberliegende Seite bilden.

Der Richtungsunterschied zwischen zwei Verrückungen wird auch der Winkel zwischen ihnen oder ihre Neigung gegen einander genannt.

35 **Bemerkung 1.** Die Neigung zweier Verrückungen aus derselben Lage gegen einander ist unter allen Umständen ein eindeutig bestimmter, reeller Winkel, kleiner als π.

Denn das Dreieck, welches jene Neigung bestimmt, kann nach 32 immer gezeichnet werden.

36 **Bemerkung 2.** Der Richtungsunterschied zwischen zwei Verrückungen ist unabhängig definiert von der Form der analytischen Darstellung, insbesondere also von der Wahl der benutzten Koordinaten.

37 **Aufgabe.** Den Richtungsunterschied zweier Verrückungen aus der gleichen Anfangslage auszudrücken durch die rechtwinkligen Koordinaten der Anfangslage und der Endlagen.

Es seien die x_ν die Koordinaten der gemeinsamen Anfangslage, die x'_ν und x''_ν die Koordinaten der beiden Endlagen. s' und s'' seien die Längen der beiden Verrückungen, s', s'' der von ihnen eingeschlossene Winkel. Unter Benutzung des ebenen Dreieckes aus den drei Entfernungen der drei Lagen erhalten wir:

$$2\, m\, s' s'' \cos s',s'' = \sum_1^{3n} {}_\nu\, m_\nu (x'_\nu - x_\nu)^2 + \sum_1^{3n} {}_\nu\, m_\nu (x''_\nu - x_\nu)^2$$

$$- \sum_1^{3n} {}_\nu\, m_\nu \left[(x''_\nu - x_\nu) - (x'_\nu - x_\nu) \right]^2$$

und hieraus

$$m\, s' s'' \cos s',s'' = \sum_1^{3n} {}_\nu\, m_\nu (x''_\nu - x_\nu)(x'_\nu - x_\nu) \quad , \qquad \text{a)}$$

in welcher Gleichung wir uns noch s' und s'' nach **31a** durch die rechtwinkligen Koordinaten ausgedrückt zu denken haben.

Lehrsatz. Zwei Verrückungen eines Systems aus gleicher Anfangslage haben den Richtungsunterschied Null, wenn die Verrückungen der einzelnen Punkte des Systems in beiden gleichgerichtet und beziehentlich proportional sind, — und umgekehrt. 38

Denn sind die Verrückungen aller Punkte gleichgerichtet und proportional, so ist für alle ν

$$x''_\nu - x_\nu = \varepsilon (x'_\nu - x_\nu) \quad ,$$

unter ε einen für alle ν gleichen Faktor verstanden. Es wird daher die rechte Seite der Gleichung **37a** gleich $m\varepsilon s'^2$. Es wird aber ferner $s'' = \varepsilon s'$, also nach jener Gleichung $\cos s',s'' = 1$, also, da s',s'' der Innenwinkel eines Dreiecks, $s',s'' = 0$ (35).

Umgekehrt, wenn $s',s'' = 0$, $\cos s',s'' = 1$ ist, so liefert die Gleichung **37a** durch Einsetzen der Werte von s' und s'' und Quadrierung:

$$0 = \left[\sum_1^{3n} {}_\nu\, m_\nu (x''_\nu - x_\nu)(x'_\nu - x_\nu) \right]^2 - \sum_1^{3n} {}_\nu\, m_\nu (x''_\nu - x_\nu)^2 \cdot \sum_1^{3n} {}_\nu\, m_\nu (x'_\nu - x_\nu)^2$$

$$= \sum_1^{3n} {}_\mu \sum_1^{3n} {}_\nu\, m_\nu m_\mu \left[(x''_\nu - x_\nu)(x'_\mu - x_\mu) - (x''_\mu - x_\mu)(x'_\nu - x_\nu) \right]^2$$

und dies ist nur möglich, wenn für jedes μ und ν

$$\frac{x''_\mu - x_\mu}{x''_\nu - x_\nu} = \frac{x'_\mu - x_\mu}{x'_\nu - x_\nu} \quad ,$$

womit auch die Umkehrung bewiesen ist.

39 **Folgerung 1.** Haben zwei Verrückungen aus derselben Anfangslage den Richtungsunterschied Null gegen eine dritte Verrückung aus der gleichen Lage, so haben sie den Richtungsunterschied Null gegen einander.

Alle Verrückungen, welche den Winkel Null mit einer bestimmten Verrückung bilden, bilden also mit einander den Winkel Null. Das Gemeinsame aller solcher Verrückungen heifst die Richtung derselben.

40 **Folgerung 2.** Wenn zwei Verrückungen eines Systems gleiche Richtung haben, so haben sie gleichen Richtungsunterschied mit jeder dritten Verrückung.

Alle Verrückungen von gleicher Richtung aus gleicher Lage bilden also denselben Winkel mit allen Verrückungen, welche eine andere gleiche Richtung haben. Dieser gemeinsame Winkel heifst auch der Winkel der Richtungen gegen einander oder der Unterschied der beiden Richtungen.

41 **Definition.** Zwei Verrückungen eines Systems heifsen identisch, wenn die Verrückungen der Punkte des Systems in beiden identisch sind. Zwei Verrückungen eines Systems heifsen gleich, wenn die Verrückungen der einzelnen Punkte in beiden gleich sind. Zwei Verrückungen eines Systems heifsen gleichgerichtet oder parallel, wenn die Verrückungen der einzelnen Punkte in beiden gleichgerichtet und beziehentlich proportional sind.

42 **Folgerung.** Zwei Verrückungen eines Systems aus verschiedener Anfangslage sind gleichgerichtet, wenn jede von ihnen gleiche Richtung hat mit einer Verrückung, welche durch ihre Anfangslage geht und der anderen Verrückung gleich ist, — und umgekehrt.

43 **Zusatz.** Richtungsunterschied zweier Verrückungen eines Systems aus verschiedener Anfangslage heifst der Winkel zwischen jeder von ihnen und einer zu der anderen parallelen Verrückung aus ihrer Anfangslage.

44 **Aufgabe.** Den Winkel zwischen zwei beliebigen Verrückungen eines Systems auszudrücken durch die rechtwinkligen Koordinaten ihrer vier Endlagen.

Es seien s' und s'' die Gröfsen der beiden Verrückungen und s', s'' ihr Winkel. Es seien die x_ν und x'_ν die Koordinaten der Anfangs- und Endlage der ersten, die x^0_ν und x''_ν die Koordinaten der Anfangs- und Endlage der zweiten Verrückung. Eine Verrückung, deren Anfangskoordinaten die x_ν sind, und deren Endkoordinaten den Wert $x_\nu + x''_\nu - x^0_\nu$ haben, hat gleiche Anfangslage mit der ersten und ist der zweiten gleich. Sie bildet also mit der ersten den gesuchten Winkel, für welchen also die Gleichung folgt:

$$m\, s' s'' \cos s', s'' = \sum_1^{3n} {}_\nu\, m_\nu (x'_\nu - x_\nu)(x''_\nu - x^0_\nu) \quad .$$

Der gleiche Wert wird erhalten, wenn wir eine Verrückung durch die Anfangslage der zweiten und gleich der ersten legen, und den Winkel zwischen dieser und der zweiten bestimmen.

Unsere Definition im Zusatz **43** war also eindeutig und daher zulässig.

Definition. Zwei Verrückungen eines Systems heifsen senkrecht auf einander, wenn der Winkel zwischen ihnen ein rechter ist. 45

Folgerung 1. Die hinreichende und notwendige analytische Bedingung dafür, dafs zwei Verrückungen senkrecht auf einander stehen, ist die Gleichung: 46

$$\sum_1^{3n} {}_\nu\, m_\nu (x'_\nu - x_\nu)(x''_\nu - x^0_\nu) = 0 \quad ,$$

in welcher Gebrauch gemacht ist von den Bezeichnungen der Aufgabe **44**.

Folgerung 2. In einem System von n Punkten ist aus einer gegebenen Lage eine $(3n - 1)$fache Mannigfaltigkeit von Verrückungen, also eine $(3n - 2)$fache Mannigfaltigkeit von Richtungen denkbar, welche auf einer gegebenen Richtung senkrecht stehen. 47

Definition. Komponente einer Verrückung in einer gegebenen Richtung heifst eine Verrückung, deren Richtung die 48

gegebene Richtung ist, und deren Gröfse gleich der Vertikalprojektion der Gröfse der gegebenen Verrückung innerhalb des Winkels ist, welchen die gegebene Verrückung mit der gegebenen Richtung bildet.

Ist also die Gröfse der gegebenen Verrückung s, und bildet sie mit der gegebenen Richtung den Winkel ω, so ist ihre Komponente in dieser Richtung gleich $s \cos \omega$.

Die Gröfse der Komponente in gegebener Richtung wird gewöhnlich schlechthin die Komponente in dieser Richtung genannt.

Zusammensetzung der Verrückungen.

49 **Bemerkung.** Werden einem System mehrere Verrückungen erteilt, welche gegebenen Verrückungen gleich sind, und welche sich so an einander schliefsen, dafs die Endlage der vorausgegangenen Verrückung die Anfangslage der folgenden ist, so ist die erreichte Endlage unabhängig von der Reihenfolge der Verrückungen.

Denn dies gilt für die Verrückungen, welche die einzelnen Punkte dabei erleiden, also für das System.

50 **Definition 1.** Eine Verrückung, welche das System in dieselbe Endlage überführt, wie eine Reihe aneinandergefügter Verrückungen, welche gegebenen Verrückungen gleich sind, heifst die Summe jener gegebenen Verrückungen.

51 **Definition 2.** Differenz zwischen einer erstgenannten und einer zweitgenannten Verrückung heifst eine Verrückung, deren Summe mit der zweitgenannten die erstgenannte ergiebt.

52 **Folgerung** (aus 49). Die Addition und Subtraktion der Verrückungen unterliegt den Regeln der algebraischen Addition und Subtraktion.

Abschnitt 3. Unendlich kleine Verrückungen und Bahnen der Systeme materieller Punkte.

Vorbemerkung. Wir behandeln von hier ab den einzelnen materiellen Punkt nicht mehr gesondert, sondern schliefsen seine Betrachtung in die Betrachtung der Systeme ein. Es ist daher im folgenden stets von Verrückungen der Systeme die Rede, auch wo dies nicht besonders bemerkt wird. 53

Unendlich kleine Verrückungen.

Erläuterung. Eine Verrückung heifst unendlich klein, wenn ihre Länge unendlich klein ist. 54

Lage der unendlich kleinen Verrückung heifst eine Lage, welcher die Grenzlagen der Verrückung unendlich nahe liegen.

Eine unendlich kleine Verrückung ist nach Richtung und Gröfse bestimmt durch die Angabe ihrer Lage und der unendlich kleinen Änderungen, welche die Koordinaten des Systems durch die Verrückung erleiden.

Aufgabe 1a. Die Länge ds einer unendlich kleinen Verrückung auszudrücken durch die Änderungen dx_ν der $3n$ rechtwinkligen Koordinaten des Systems. 55

Indem wir in Gleichung **31a** $x'_\nu - x_\nu$ ersetzen durch dx_ν, erhalten wir

$$m\, ds^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu\, dx_\nu^2 \quad .$$

Aufgabe 1b. Den Winkel s,s' der beiden unendlich kleinen Verrückungen ds und ds' auszudrücken durch die Änderungen dx_ν und dx'_ν der $3n$ rechtwinkligen Koordinaten des Systems. 56

Indem wir in Gleichung **44** für $x'_\nu - x_\nu$ setzen dx_ν und für $x''_\nu - x^0_\nu$ setzen dx'_ν, erhalten wir

$$m\, ds\, ds' \cos s,s' = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu\, dx_\nu\, dx'_\nu \quad .$$

Die Lösung gilt, ob beide Verrückungen gleiche Lage haben oder ob nicht.

57 **Aufgabe 2a.** Die Länge ds einer unendlich kleinen Verrückung auszudrücken durch die Änderungen dp_ϱ der r allgemeinen Koordinaten p_ϱ des Systems.

Die rechtwinkligen Koordinaten x_ν sind Funktionen der p_ϱ und zwar der p_ϱ allein, da sie durch diese vollständig bestimmt sind, und da Verrückungen des Systems, welche nicht durch Änderungen der p_ϱ darstellbar sind, als von der Betrachtung ausgeschlossen gelten (13). Setzen wir zur Abkürzung

a) $$\frac{\partial x_\nu}{\partial p_\varrho} = \alpha_{\nu\varrho} \quad ,$$

so bestehen demnach $3n$ Gleichungen von der Form:

b) $$dx_\nu = \sum_1^r{}^\varrho \, \alpha_{\nu\varrho} \, dp_\varrho \quad ,$$

in welchen die $\alpha_{\nu\varrho}$ Funktionen der Lage sind, also als Funktionen der p_ϱ aufgefafst werden können. Setzen wir die Werte b) in Gleichung 55 ein, und setzen noch zur Abkürzung

c) $$m \, a_{\varrho\sigma} = \sum_1^{3n}{}^\nu \, m_\nu \, \alpha_{\nu\varrho} \, \alpha_{\nu\sigma} \quad ,$$

so erhalten wir als Lösung der Aufgabe:

d) $$ds^2 = \sum_1^r{}^\varrho \sum_1^r{}^\sigma \, a_{\varrho\sigma} \, dp_\varrho \, dp_\sigma \quad .$$

58 **Aufgabe 2b.** Den Winkel s,s' zweier unendlich kleiner Verrückungen von der Länge ds und ds' und gleicher Lage auszudrücken durch die Änderungen dp_ϱ und dp'_ϱ der r allgemeinen Koordinaten p_ϱ des Systems.

Wir bilden die Werte der dx'_ν nach Gleichung 57 b und setzen diese und die Werte für dx_ν in Gleichung 56 ein. Wir beachten, dafs für beide Verrückungen die Werte der Koordi-

naten selbst, also die der Gröfsen $\alpha_{\varrho\sigma}$ gleich sind, und wir erhalten:

$$ds\, ds' \cos s,s' = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma a_{\varrho\sigma}\, dp_\varrho\, dp'_\sigma \quad .$$

Eigenschaften der $\alpha_{\varrho\sigma}$ und $a_{\varrho\sigma}$. Einführung der $b_{\varrho\sigma}$.

1. Für alle Werte der ϱ, σ, τ ist: (vergl. **57a**) **59**

$$\frac{\partial \alpha_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} = \frac{\partial \alpha_{\varrho\tau}}{\partial p_\sigma} \quad .$$

2. Für alle Werte von ϱ und σ ist: (vergl. **57c**) **60**

$$a_{\varrho\sigma} = a_{\sigma\varrho}$$

3. Die Zahl der Gröfsen $\alpha_{\varrho\sigma}$ ist gleich $3nr$; die **61**
Zahl der von einander verschiedenen Gröfsen $a_{\varrho\sigma}$ ist gleich $\frac{1}{2}r(r+1)$.

4. Für alle ϱ ist **62**

$$a_{\varrho\varrho} > 0 \quad .$$

Für alle Werte von ϱ und σ ist

$$a_{\varrho\varrho}\, a_{\sigma\sigma} - a_{\varrho\sigma}^2 > 0 \quad .$$

Denn es ist die rechte Seite der Gleichung **57d** nach ihrer Ableitung aus Gleichung **55** eine notwendig positive Gröfse, welches auch die Werte der dp_ϱ sind. Hierfür sind die vorstehenden Ungleichheiten notwendige Bedingungen.

5. Für alle Werte der ϱ, σ, τ gilt die Gleichung: **63**

$$\sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu\, \alpha_{\nu\sigma} \left(\frac{\partial \alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\tau} + \frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\varrho}\right) = m \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} + \frac{\partial a_{\tau\sigma}}{\partial p_\varrho} + \frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial p_\sigma}\right) \quad .$$

Um die Gleichung zu beweisen, setzt man rechts die Werte

der $a_{\varrho\sigma}$ aus Gleichung **57e** ein und macht Gebrauch von den Eigenschaften der $\alpha_{\varrho\sigma}$ nach **59**.

64 6. Die Determinante aus den r^2 Größen $a_{\varrho\sigma}$ sei $\triangle$. Der Faktor von $a_{\varrho\sigma}$ in $\triangle$, dividiert durch $\triangle$, soll dauernd bezeichnet werden mit $b_{\varrho\sigma}$. Es ist also als Definition

$$b_{\varrho\sigma} = \frac{1}{\triangle} \frac{\partial \triangle}{\partial a_{\varrho\sigma}} \quad .$$

Für alle Werte von ϱ und σ ist dann

$$b_{\varrho\sigma} = b_{\sigma\varrho} \quad .$$

Die Zahl der von einander verschiedenen Größen $b_{\varrho\sigma}$ ist gleich $\frac{1}{2} r(r+1)$.

65 7. Der Wert des Ausdrucks

$$\sum_1^r{}_\varrho\, a_{\varrho\iota}\, b_{\varrho\varkappa}$$

ist gleich Eins, sobald $\iota = \varkappa$ ist; jener Wert ist gleich Null, sobald ι und $\varkappa$ verschieden sind.

Denn ist $\iota = \varkappa$, so stellt der Ausdruck $\sum_1^r{}_\varrho\, a_{\varrho\iota}\, b_{\varrho\varkappa} \triangle$ die Determinante $\triangle$ selbst dar. Ist aber ι von $\varkappa$ verschieden, so stellt er eine Determinante dar, welche aus $\triangle$ entsteht, indem die Reihe $a_{\varrho\varkappa}$ ersetzt wird durch die Reihe der $a_{\varrho\iota}$. In dieser Determinante sind also zwei Reihen gleich, und ihr Wert ist Null.

66 8. Es gelten für alle Werte der ι und $\varkappa$ die beiden Gleichungen:

$$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma}\, a_{\varrho\iota}\, a_{\sigma\varkappa} = a_{\iota\varkappa} \quad ;$$

$$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\, b_{\varrho\iota}\, b_{\sigma\varkappa} = b_{\iota\varkappa} \quad .$$

Man bilde nach **65** den Wert des Ausdrucks $\sum_1^r{}_\varrho\, b_{\varrho\sigma}\, a_{\varrho\iota}$

bez. $\sum_1^r {}^\varrho\, a_{\varrho\sigma} b_{\varrho\iota}$ für alle Werte des σ von 1 bis r, man multipliziere die entstandenen Gleichungen der Reihe nach mit $a_{\sigma\varkappa}$ bez. $b_{\sigma\varkappa}$ und addiere, so folgen die Gleichungen.

9. Bestimmte Änderungen der Gröfsen $a_{\varrho\sigma}$ haben bestimmte Änderungen der Gröfsen $b_{\varrho\sigma}$ zur Folge. Bezeichnen $\delta a_{\varrho\sigma}$ und $\delta b_{\varrho\sigma}$ beliebige zusammengehörige Variationen der $a_{\varrho\sigma}$ und $b_{\varrho\sigma}$, so gelten die Gleichungen: 67

$$\sum_1^r {}^\varrho \sum_1^r {}^\sigma\, a_{\varrho\iota}\, a_{\sigma\varkappa}\, \delta b_{\varrho\sigma} = -\,\delta a_{\iota\varkappa} \quad ;$$

$$\sum_1^r {}^\varrho \sum_1^r {}^\sigma\, b_{\varrho\iota}\, b_{\sigma\varkappa}\, \delta a_{\varrho\sigma} = -\,\delta b_{\iota\varkappa} \quad .$$

Man variiere die Gleichungen **66** und mache Gebrauch von den Beziehungen **65**, so folgen die Gleichungen.

10. Variiert man in den $a_{\varrho\sigma}$ und $b_{\varrho\sigma}$ nur eine bestimmte Koordinate p_τ, von welcher sie abhängen, so folgt insbesondere für jeden Wert des τ 68

$$\sum_1^r {}^\varrho \sum_1^r {}^\sigma\, a_{\varrho\iota}\, a_{\sigma\varkappa} \frac{\partial b_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} = -\,\frac{\partial a_{\iota\varkappa}}{\partial p_\tau} \quad ;$$

$$\sum_1^r {}^\varrho \sum_1^r {}^\sigma\, b_{\varrho\iota}\, b_{\sigma\varkappa} \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} = -\,\frac{\partial b_{\iota\varkappa}}{\partial p_\tau} \quad .$$

Verrückungen in Richtung der Koordinaten.

Definition 1. Verrückung in Richtung einer bestimmten Koordinate heifst eine unendlich kleine Verrückung, bei welcher sich nur diese eine Koordinate, nicht aber die übrigen gleichzeitig benutzten ändern. 69

Die Richtung aller Verrückungen in Richtung derselben Koordinate aus derselben Lage ist dieselbe; sie heifst die Richtung der Koordinate in dieser Lage.

70 **Bemerkung.** Die Richtung einer Koordinate hängt ab von der Wahl der übrigen, gleichzeitig benutzten Koordinaten des Systems.

71 **Definition 2.** Reduzierte Komponente einer unendlich kleinen Verrückung in Richtung einer bestimmten Koordinate heifst die Komponente der Verrückung in Richtung der Koordinate (48, 69), dividiert durch die Änderungsgeschwindigkeit der Koordinate bei einer Verrückung in ihrer eigenen Richtung.

Die reduzierte Komponente in der Richtung einer Koordinate nennen wir auch kurz die Komponente nach der Koordinate.

Man spricht also von der Komponente einer beliebigen Verrückung in einer beliebigen Richtung, aber man kann nicht sprechen von der reduzierten Komponente in einer beliebigen Richtung, sondern nur von der reduzierten Komponente einer unendlich keinen Verrückung in der Richtung einer Koordinate.

72 **Aufgabe 1a.** Die Neigung s,x_ν der Verrückung ds gegen die rechtwinklige Koordinate x_ν durch die $3n$ Änderungen dx_ν auszudrücken.

In Gleichung 56 setzen wir die dx'_ν gleich Null für alle ν mit Ausnahme des bestimmten ν, auf welches sich die Aufgabe bezieht. Dann ist die Richtung von ds' nach 69 die von x_ν, und der Winkel s,s' wird der gesuchte Winkel. Da ferner alsdann nach 55 $m\,ds'^2 = m_\nu\,dx'^2_\nu$, so wird als Lösung der Aufgabe erhalten:

$$ds \cos s,x_\nu = \sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\,dx_\nu \quad ,$$

worin für ds sein Wert in den dx_ν einzusetzen ist.

73 **Aufgabe 1b.** Die Komponenten $d\bar{x}_\nu$ der Verrückung ds nach den rechtwinkligen Koordinaten x_ν durch die Änderungen dx_ν der Koordinaten auszudrücken.

Setzen wir in der vorigen Aufgabe $s,x_\nu = 0$, so erfolgt die Verrückung ds in Richtung der Koordinate x_ν, und wir erkennen, dafs die Änderungsgeschwindigkeit der Koordinate bei einer Verrückung in ihrer eigenen Richtung gleich $dx_\nu : ds$ also gleich $\sqrt{m/m_\nu}$ ist. Die linke Seite der Gleichung 72 stellt

schon die Komponente von ds in Richtung von x_ν dar; dividieren wir also die Gleichung durch $\sqrt{m/m_\nu}$, so erhalten wir (71) als Lösung der Aufgabe:

$$d\bar{x}_\nu = \frac{m_\nu}{m} dx_\nu \quad .$$

Aufgabe 1c. Die Änderungen dx_ν der rechtwinkligen Koordinaten bei einer Verrückung auszudrücken durch die reduzierten Komponenten der Verrückung nach jenen Koordinaten. 74

Die Lösung der vorigen Aufgabe giebt unmittelbar:

$$dx_\nu = \frac{m}{m_\nu} d\bar{x}_\nu \quad .$$

Aufgabe 2a. Die Neigung s,p_ϱ der Verrückung ds gegen die allgemeine Koordinate p_ϱ durch die r Änderungen dp_ϱ auszudrücken. 75

In Gleichung 58 setzen wir die dp'_ϱ gleich Null für alle ϱ mit Ausnahme des bestimmten ϱ, auf welches sich die Aufgabe bezieht. Die Richtung von ds' ist alsdann nach 69 die von p_ϱ, und der Winkel s,s' wird der gesuchte Winkel. Da gleichzeitig nach 57 $ds'^2 = a_{\varrho\varrho} dp'^2_\varrho$ wird, so erhalten wir als Lösung der Aufgabe:

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\, ds \cos s,p_\varrho = \sum_1^r {}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\, dp_\sigma \quad ,$$

worin für ds sein Wert in den dp_σ einzusetzen ist.

Anmerkung 1. Setzen wir in der Lösung der vorigen Aufgabe alle dp_σ gleich Null mit Ausnahme eines bestimmten dp_σ, so wird die Richtung von ds die Richtung dieser Koordinate p_σ, und der Winkel s,p_ϱ geht über in den Winkel p_σ,p_ϱ, welchen die Koordinate p_σ mit der Koordinate p_ϱ bildet. Da gleichzeitig alsdann $ds^2 = a_{\sigma\sigma} dp_\sigma^2$ wird, so erhalten wir für diesen Winkel: 76

$$\cos p_\sigma,p_\varrho = \frac{a_{\varrho\sigma}}{\sqrt{a_{\varrho\varrho} a_{\sigma\sigma}}} \quad .$$

Dieser Winkel ist nach 62 stets ein reeller Winkel.

77 **Anmerkung 2.** Die Koordinaten p_ϱ heifsen orthogonal, wenn jede von ihnen in jeder Lage auf allen übrigen senkrecht steht. Die hinreichende und notwendige Bedingung hierfür ist (76), dafs alle $a_{\varrho\sigma}$, für welche ϱ und σ verschieden sind, verschwinden. Die rechtwinkligen Koordinaten sind ein Beispiel orthogonaler Koordinaten.

78 **Aufgabe 2b.** Die Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ der Verrückung ds nach den Koordinaten p_ϱ auszudrücken durch die Änderungen dp_ϱ dieser Koordinaten bei der Verrückung.

Setzen wir in Gleichung 75 s,p_ϱ gleich Null, so erfolgt die Verrückung ds dieser Gleichung in Richtung von p_ϱ; alle dp_σ sind also Null, ausser dp_ϱ, und die Gleichung wird also $\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\, ds = a_{\varrho\varrho}\, dp_\varrho$. Die Änderungsgeschwindigkeit von p_ϱ mit einer Verrückung in ihrer eigenen Richtung ist also $1/\sqrt{a_{\varrho\varrho}}$. Bedenken wir, dafs nach 48 $ds \cos s,p_\varrho$ die Komponente von ds in der Richtung von p_ϱ ist, und beachten die Definition 71, so erkennen wir, dafs die linke Seite der Gleichung 75 bereits die reduzierte Komponente nach p_ϱ darstellt, und wir erhalten also die Beziehung:

a) $$d\bar{p}_\varrho = \sqrt{a_{\varrho\varrho}}\, ds \cos s,p_\varrho \quad ,$$

also als Lösung der Aufgabe:

b) $$d\bar{p}_\varrho = \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\, dp_\sigma \quad .$$

79 **Aufgabe 2c.** Die Änderungen dp_ϱ der Koordinaten bei Ausführung der Verrückung ds auszudrücken durch die Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ der Verrückung nach den Koordinaten p_ϱ.

Die Auflösung der Gleichungen 78 b unter Benutzung der Bezeichnung von 64 ergiebt unmittelbar:

$$dp_\varrho = \sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma}\, d\bar{p}_\sigma \quad .$$

80 **Aufgabe 3a.** Die Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ einer Verrückung nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ auszudrücken durch die

Komponenten $d\bar{x}_\nu$ der Verrückung nach den rechtwinkligen Koordinaten des Systems.

Wir erhalten der Reihe nach unter Benutzung von **78**, **57c**, **57b**, **74**:

$$d\bar{p}_\varrho = \sum_1^r{}_\sigma a_{\varrho\sigma}\, dp_\sigma = \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m} \alpha_{\nu\varrho}\, \alpha_{\nu\sigma}\, dp_\sigma$$

$$= \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m} \alpha_{\nu\varrho}\, dx_\nu = \sum_1^{3n}{}_\nu \alpha_{\nu\varrho}\, d\bar{x}_\nu \quad .$$

Aufgabe 3b. Die Komponenten $d\bar{x}_\nu$ einer Verrückung 81
nach den rechtwinkligen Koordinaten x_ν auszudrücken durch die Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ der Verrückung nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ des Systems.

Wir erhalten der Reihe nach unter Benutzung von **73**, **57b**, **79**:

$$d\bar{x}_\nu = \frac{m_\nu}{m}\, dx_\nu = \frac{m_\nu}{m} \sum_1^r{}_\sigma \alpha_{\nu\sigma}\, dp_\sigma$$

$$= \frac{m_\nu}{m} \sum_1^r{}_\sigma \alpha_{\nu\sigma} \sum_1^r{}_\varrho b_{\varrho\sigma}\, d\bar{p}_\varrho \quad ,$$

also, wenn wir zur Abkürzung setzen

$$\frac{m_\nu}{m} \sum_1^r{}_\sigma \alpha_{\nu\sigma}\, b_{\varrho\sigma} = \beta_{\nu\varrho} \quad , \qquad \text{a)}$$

folgt als Lösung der Aufgabe:

$$d\bar{x}_\nu = \sum_1^r{}_\varrho \beta_{\nu\varrho}\, d\bar{p}_\varrho \quad . \qquad \text{b)}$$

Aufgabe 4. Die Länge einer unendlich kleinen Verrückung 82
auszudrücken durch ihre reduzierten Komponenten nach den Koordinaten des Systems.

Wenden wir die allgemeinen Koordinaten p_ϱ an, so erhalten wir durch successive Anwendung von **78b** und **79** auf Gleichung **57d** nach einander:

$$ds^2 = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma a_{\varrho\sigma}\, dp_\varrho\, dp_\sigma$$

$$= \sum_1^r{}_\varrho dp_\varrho\, d\bar{p}_\varrho$$

$$= \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma b_{\varrho\sigma}\, d\bar{p}_\varrho\, d\bar{p}_\sigma \quad .$$

83 Wenden wir insbesondere die rechtwinkligen Koordinaten an, so erhalten diese Gleichungen die Form:

$$ds^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m}\, dx_\nu^2$$

$$= \sum_1^{3n}{}_\nu dx_\nu\, d\bar{x}_\nu$$

$$= \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m}{m_\nu}\, d\bar{x}_\nu^2 \quad .$$

84 **Aufgabe 5a.** Den Winkel zwischen zwei unendlich kleinen Verrückungen beliebiger Lage auszudrücken durch die reduzierten Komponenten der beiden Verrückungen nach den rechtwinkligen Koordinaten.

Durch successive Anwendung von **73** und **74** auf Gleichung **56** erhalten wir nach einander die Formen:

$$ds\, ds' \cos s,s' = \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m}\, dx_\nu\, dx_\nu'$$

$$= \sum_1^{3n}{}_\nu dx_\nu\, d\bar{x}_\nu' = \sum_1^{3n}{}_\nu d\bar{x}_\nu\, dx_\nu'$$

$$= \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m}{m_\nu}\, d\bar{x}_\nu\, d\bar{x}_\nu' \quad .$$

Hierin haben wir für die ds und ds' ihre Werte in den $d\bar{x}_\nu$ nach **83** einzusetzen.

Aufgabe 5b. Den Winkel zwischen zwei unendlich kleinen Verrückungen aus der gleichen Lage auszudrücken durch die Komponenten der beiden Verrückungen nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ. 85

Durch successive Anwendung von 78 und 79 auf Gleichung 58 erhalten wir nach einander die Formen:

$$ds\,ds'\cos s,s' = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\, dp_\varrho\, dp'_\sigma$$

$$= \sum_1^r{}_\varrho\, dp_\varrho\, d\bar{p}'_\varrho = \sum_1^r{}_\varrho\, d\bar{p}_\varrho\, dp'_\varrho$$

$$= \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma}\, d\bar{p}_\varrho\, d\bar{p}'_\sigma \quad .$$

Hierin sind wieder für die ds und ds' ihre Werte in den $d\bar{p}_\varrho$ nach 82 einzusetzen.

Aufgabe 6. Den Winkel zweier unendlich kleiner Verrückungen auszudrücken durch die Winkel, welche beide mit den Koordinaten des Systems bilden. 86

Wir dividieren die letzte der Gleichungen 85 durch $ds\,ds'$ und beachten, dafs nach 78a

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\cos s,p_\varrho = \frac{d\bar{p}_\varrho}{ds} \quad , \quad \sqrt{a_{\varrho\varrho}}\cos s',p_\varrho = \frac{d\bar{p}'_\varrho}{ds} \quad ;$$

wir erhalten so als Lösung der Aufgabe:

$$\cos s,s' = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma} \sqrt{a_{\varrho\varrho}\, a_{\sigma\sigma}}\, \cos s,p_\varrho \cos s',p_\sigma \quad .$$

Wenden wir rechtwinklige Koordinaten an, so erhält die vorstehende Gleichung die besondere Form: 87

$$\cos s,s' = \sum_1^{3n}{}_\nu \cos s,x_\nu \cos s',x_\nu \quad .$$

Es ist zu bemerken, dass die Gleichung 86 gleiche Lage der beiden Verrückungen voraussetzt, während die Gleichung 87 von dieser Voraussetzung frei ist.

88 **Lehrsatz.** Die r Winkel, welche eine beliebige Richtung in einer bestimmten Lage mit den Richtungen der r allgemeinen Koordinaten daselbst bildet, sind verbunden durch die Gleichung:

$$\sum_1^r {}_\varrho \sum_1^r {}_\sigma \, b_{\varrho\sigma} \sqrt{a_{\varrho\varrho}\, a_{\sigma\sigma}} \cos s{,}p_\varrho \cos s{,}p_\sigma = 1 \quad .$$

Denn diese Gleichung folgt, wenn wir in 86 die Richtungen von ds und ds' zusammenfallen lassen.

89 **Folgerung.** Insbesondere genügen die $3n$ Winkel, welche eine beliebige Verrückung des Systems mit den rechtwinkligen Koordinaten des Systems bildet, der Gleichung

$$\sum_1^{3n} {}_\nu \cos^2 s{,}x_\nu = 1 \quad .$$

Benutzung partieller Differentialquotienten.

90 **Bezeichnung.** Durch die Werte der Koordinaten p_ϱ ihrer Lage und der Änderungen dp_ϱ derselben ist die Länge ds einer unendlich kleinen Verrückung bestimmt. Ändern wir eins jener Bestimmungsstücke, während die übrigen constant gehalten werden, so soll das entsprechende partielle Differential von ds mit $\partial_p ds$ bezeichnet werden.

Betrachten wir dagegen, was ebenfalls zulässig ist, die Koordinaten p_ϱ und die Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ nach ihnen als die unabhängigen Bestimmungsstücke von ds, so soll das entsprechende partielle Differential von ds mit $\partial_q ds$ bezeichnet werden.

Andere partielle Differentiale von ds sind selbstverständlich möglich, aber es ist für unseren Zweck nicht nötig, sie zu bezeichnen, sondern es bleibt für sie das gewöhnliche, jedesmal durch eine Worterklärung näher zu bestimmende Zeichen ∂ds vorbehalten.

91 **Bemerkung 1.** Die Komponenten einer Verrückung nach den Koordinaten lassen sich als partielle Differentialquotienten

der Länge der Verrückung darstellen. Und zwar geschieht dies in der Form:

$$d\bar{p}_\varrho = \frac{1}{2}\frac{\partial_p ds^2}{\partial dp_\varrho} = ds\frac{\partial_p ds}{\partial dp_\varrho} \quad .$$

Man differentiiere die Gleichung 57 d und beachte 78.

Bemerkung 2. Die Neigung einer unendlich kleinen Verrückung gegen die Koordinate p_ϱ kann mit Hülfe der partiellen Differentialquotienten ihrer Länge dargestellt werden. Und zwar geschieht dies in der Form: 92

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\cos s,p_\varrho = \frac{\partial_p ds}{\partial dp_\varrho} \quad .$$

Man beachte 91 und 78.

Anmerkung. Werden insbesondere in den Bemerkungen 1 und 2 rechtwinklige Koordinaten angewandt, so erhält man 93

$$d\bar{x}_\nu = ds\frac{\partial ds}{\partial dx_\nu} \quad , \qquad \text{a)}$$

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\cos s,x_\nu = \frac{\partial ds}{\partial dx_\nu} \quad , \qquad \text{b)}$$

wobei die Bedeutung der partiellen Differentiale aus dem vorigen hervorgeht.

Bemerkung 3. Die Änderungen, welche die Koordinaten p_ϱ bei Durchlaufung einer unendlich kleinen Verrückung erleiden, lassen sich als partielle Differentialquotienten der Länge der Verrückung darstellen. Und zwar geschieht dies in der Form: 94

$$dp_\varrho = \frac{1}{2}\frac{\partial_q ds^2}{\partial d\bar{p}_\varrho} = ds\frac{\partial_q ds}{\partial d\bar{p}_\varrho} \quad .$$

Man beachte die Gleichungen 82 und 79.

95 **Bemerkung 4.** Für alle Werte des Index τ besteht zwischen den partiellen Differentialquotienten von ds die Gleichung:

a) $$\frac{\partial_p ds}{\partial p_\tau} = -\frac{\partial_q ds}{\partial p_\tau} \quad .$$

Denn es ist:

$$\frac{\partial_p ds}{\partial p_\tau} = \frac{1}{2ds} \sum_1^r{}^\varrho \sum_1^r{}^\sigma \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} dp_\varrho \, dp_\sigma$$

und

$$\frac{\partial_q ds}{\partial p_\tau} = \frac{1}{2ds} \sum_1^r{}^\varrho \sum_1^r{}^\sigma \frac{\partial b_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} d\bar{p}_\varrho \, d\bar{p}_\sigma \quad .$$

Setzen wir in der ersteren Form für die dp_ϱ und dp_σ ihre Werte in den $d\bar{p}_\varrho$ und $d\bar{p}_\sigma$ nach **79**, und beachten die Beziehungen **68** und die zweite Form, so folgt die Behauptung. Ebenso wenn wir in gleicher Weise von der zweiten Form ausgehen.

96 **Lehrsatz.** Erleidet die Lage einer unendlich kleinen Verrückung zweimal dieselbe Veränderung, während gleichzeitig das eine Mal die Komponenten nach den Koordinaten, das andere Mal die Änderungen der Koordinaten die ursprünglichen bleiben, so ist die Änderung der Länge der Verrückung in beiden Fällen entgegengesetzt gleich.

Da im zweiten Falle die $\delta dp_\varrho = 0$ sein sollen, während die Koordinaten p_ϱ die Änderungen δp_ϱ erleiden, so ist die Änderung der Länge der Verrückung:

a) $$\delta_p ds = \sum_1^r{}^\tau \frac{\partial_p ds}{\partial p_\tau} \delta p_\tau \quad .$$

Im ersten Falle sollen die $\delta d\bar{p}_\varrho = 0$ sein, während die Koordinaten dieselben Änderungen δp_ϱ erleiden, es ist also jetzt:

b) $$\delta_q ds = \sum_1^r{}^\tau \frac{\partial_q ds}{\partial p_\tau} \delta p_\tau \quad .$$

Aus beiden Gleichungen **a)** und **b)** und der Bemerkung 4 folgt

$$\delta_p ds = -\delta_q ds \quad , \qquad \text{c)}$$

welches die Behauptung ist.

Bahnen der Systeme.

Erläuterungen.

1. Die gleichzeitig vorgestellte Gesamtheit der Lagen, welche ein System beim Übergang aus einer Lage in die andere durchläuft, heifst eine Bahn des Systems. 97

Eine Bahn kann auch betrachtet werden als die gleichzeitig vorgestellte Gesamtheit der Verrückungen, welche das System beim Übergang aus der einen in die andere Lage erleidet.

2. Ein Teil der Bahn, welcher durch zwei unendlich nahe Lagen begrenzt wird, heifst ein Bahnelement. Ein Bahnelement ist eine unendlich kleine Verrückung; es hat eine Länge und eine Richtung. 98

3. Richtung der Bahn eines Systems in einer bestimmten ihrer Lagen heifst die Richtung eines dieser Lage unendlich benachbarten Bahnelements. 99

Länge der Bahn eines Systems zwischen zwei ihrer Lagen heifst die Summe der Längen der Bahnelemente zwischen diesen Lagen.

Analytische Darstellung. Die Bahn eines Systems wird analytisch dargestellt, indem die Koordinaten ihrer Lagen angegeben werden als Funktionen einer und derselben, übrigens beliebigen Variabeln. Jeder Lage der Bahn ist dann ein Wert der Variabeln zugeordnet. Als unabhängige Variabele kann eine der Koordinaten selbst dienen. Sehr häufig ist es zweckmäfsig, als unabhängige Variabele die Länge der Bahn, von einer bestimmten Lage der Bahn ab gerechnet, zu benutzen. Die Differentialquotienten nach dieser bestimmten Variabelen, 100

6*

also nach der Bahnlänge, sollen in LAGRANGE's Weise durch Accente bezeichnet werden.

101 **Definition 1.** Die Bahn eines Systems heifst gerade, wenn sie in allen ihren Lagen die gleiche Richtung hat.

102 **Folgerung.** Beschreibt ein System eine gerade Bahn, so beschreiben seine einzelnen Punkte gerade Linien, deren Längen, von der Ausgangslage an gerechnet, einander beständig proportional bleiben. (38).

103 **Definition 2.** Die Bahn eines Systems heifst krumm, wenn sich die Richtung der Bahn von Lage zu Lage ändert. Die Anderungsgeschwindigkeit der Richtung mit der Bahnlänge heifst die Krümmung der Bahn.

Die Krümmung der Bahn ist also der Grenzwert des Verhältnisses zwischen dem Richtungsunterschied und der Entfernung zweier benachbarter Bahnelemente.

104 **Anmerkung.** Der Wert der Krümmung ist hierdurch definiert unabhängig von der Form der analytischen Darstellung, also insbesondere unabhängig von der besonderen Wahl der Koordinaten des Systems.

105 **Aufgabe 1.** Die Krümmung c der Bahn auszudrücken durch die Änderungen der Winkel, welche die Bahn mit den rechtwinkligen Koordinaten des Systems bildet.

Es sei $d\varepsilon$ der Winkel zwischen der Richtung der Bahn am Anfang und am Ende des Bahnelementes ds. Dann ist nach Definition (**103**):

$$c = \frac{d\varepsilon}{ds} \quad .$$

Es seien ferner die $\cos s,x_\nu$ die Cosinus der Winkel, welche die Bahn am Anfange von ds mit den x_ν bildet, und es seien $\cos s,x_\nu + d\cos s,x_\nu$ die Werte der gleichen Gröfsen am Ende von ds. Dann ist nach Gleichung **87**:

$$\cos (d\varepsilon) = \sum_1^{3n}{}_\nu \cos s,x_\nu (\cos s,x_\nu + d\cos s,x_\nu) \quad .$$

Es ist aber ferner nach Gleichung **89** sowohl

$$\sum_1^{3n}{}_{\nu} \cos^2 s,x_\nu = 1 \quad ,$$

als auch

$$\sum_1^{3n}{}_{\nu} (\cos s,x_\nu + d\cos s,x_\nu)^2 = 1 \quad .$$

Indem wir das Doppelte der ersten Gleichung subtrahieren von der Summe der beiden letzteren, erhalten wir:

$$2 - 2\cos(d\varepsilon) = d\varepsilon^2 = \sum_1^{3n}{}_{\nu} (d\cos s,x_\nu)^2 \quad ,$$

also durch Division mit ds^2 die Lösung der Aufgabe:

$$c^2 = \sum_1^{3n}{}_{\nu} \left(\frac{d\cos s,x_\nu}{ds}\right)^2 \quad .$$

Aufgabe 2. Die Krümmung der Bahn darzustellen durch die Änderungen der rechtwinkligen Koordinaten des Systems mit der Bahnlänge. **106**

Unter Berücksichtigung von **72** haben wir (**100**):

$$\cos s,x_\nu = \sqrt{\frac{m_\nu}{m}} \cdot x_\nu' \quad ,$$

also

$$(\cos s,x_\nu)' = \sqrt{\frac{m_\nu}{m}} \cdot x_\nu'' \quad ,$$

also nach **105** als Lösung der Aufgabe:

$$mc^2 = \sum_1^{3n}{}_{\nu} m_\nu x_\nu''^2 \quad .$$

Aufgabe 3. Die Krümmung der Bahn darzustellen durch die Anderungen der rechtwinkligen Koordinaten, dieselben betrachtet als Funktionen einer beliebigen Variabelen τ. **107**

Nach den Regeln der Differentialrechnung ist

$$x_\nu'' = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx_\nu}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{ds}\right) = \left(\frac{d\tau}{ds}\right)^3 \left\{\frac{ds}{d\tau}\cdot\frac{d^2x_\nu}{d\tau^2} - \frac{dx_\nu}{d\tau}\cdot\frac{d^2s}{d\tau^2}\right\} \quad .$$

Setzen wir diesen Ausdruck in c^2 ein, und beachten, daſs (55)

a) $$m\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \left(\frac{dx_\nu}{d\tau}\right)^2 \quad ,$$

also

b) $$m\frac{ds}{d\tau}\cdot\frac{d^2s}{d\tau^2} = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \frac{dx_\nu}{d\tau}\cdot\frac{d^2x_\nu}{d\tau^2} \quad .$$

ist, so folgt als Lösung der Aufgabe:

c) $$m\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^4 c^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \left(\frac{d^2x_\nu}{d\tau^2}\right)^2 - m\left(\frac{d^2s}{d\tau^2}\right)^2 \quad ,$$

worin für $ds/d\tau$ und $d^2s/d\tau^2$ noch ihre Werte aus den vorigen Gleichungen zu setzen sind.

108 **Aufgabe 4.** Die Krümmung der Bahn darzustellen durch die Änderungen der allgemeinen Koordinaten p_ϱ des Systems mit der Bahnlänge.

Wir führen in den Ausdruck **106** an Stelle der rechtwinkligen Koordinaten die p_ϱ ein, indem wir die x_ν'' ausdrücken durch die p_ϱ' und p_ϱ''. Zunächst ist nach **57 b**

$$x_\nu' = \sum_1^{r}{}_\varrho\, \alpha_{\nu\varrho} p_\varrho' \quad ,$$

also

$$x_\nu'' = \sum_1^{r}{}_\varrho\, (\alpha_{\nu\varrho} p_\varrho'' + \alpha_{\nu\varrho}' p_\varrho') \quad ,$$

also

$$x_\nu''^2 = \sum_1^{r}{}_\varrho \sum_1^{r}{}_\sigma\, (\alpha_{\nu\varrho}\,\alpha_{\nu\sigma} p_\varrho'' p_\sigma'' + 2\,\alpha_{\nu\varrho}'\,\alpha_{\nu\sigma} p_\varrho' p_\sigma'' + \alpha_{\nu\varrho}'\,\alpha_{\nu\sigma}' p_\varrho' p_\sigma') \ .$$

Man bilde diese Gleichungen für alle ν, multipliziere eine jede mit m_ν/m, und addiere alle. Links entsteht c^2. Rechts kann die Summation nach ν mit Hülfe der schon eingeführten Grössen $a_{\varrho\sigma}$ in den ersten beiden Gliedern ausgeführt werden. Im ersten Glied ergiebt die Summation unmittelbar nach 57 e $a_{\varrho\sigma}$. Als Faktor von p''_σ im zweiten Gliede wird nach einander erhalten: (108)

$$2\sum_1^r{}_\varrho\, p'_\varrho \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m}\alpha_{\nu\sigma}\,\alpha'_{\nu\varrho} = 2\sum_1^r{}_\varrho\sum_1^r{}_\tau\, p'_\varrho p'_\tau \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m}\alpha_{\nu\sigma}\frac{\partial\alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\tau}$$

$$= \sum_1^r{}_\varrho\sum_1^r{}_\tau\, p'_\varrho p'_\tau \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m}\,\alpha_{\nu\sigma}\left(\frac{\partial\alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\tau}+\frac{\partial\alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\varrho}\right)$$

$$= \sum_1^r{}_\varrho\sum_1^r{}_\tau\, p'_\varrho p'_\tau \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau}+\frac{\partial a_{\tau\sigma}}{\partial p_\varrho}-\frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial p_\sigma}\right) \qquad \text{(nach 63)}$$

$$= \sum_1^r{}_\varrho\sum_1^r{}_\tau\, p'_\varrho p'_\tau \left(2\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau}-\frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial p_\sigma}\right) \quad .$$

Beim Übergang von der zweiten in die dritte Form und von der vierten in die fünfte Form ist Gebrauch gemacht von der Bemerkung, dafs, wenn $F(\varrho,\sigma)$ ein beliebiger Ausdruck ist, welcher die Indices ϱ und σ enthält, alsdann identisch

$$\sum_1^r{}_\varrho\sum_1^r{}_\sigma F(\varrho,\sigma) = \sum_1^r{}_\varrho\sum_1^r{}_\sigma F(\sigma,\varrho) \qquad \text{a)}$$

ist.

Der Faktor des dritten Gliedes läfst sich nicht durch die $a_{\varrho\sigma}$ ausdrücken. Um im Endresultat die Beziehung auf die rechtwinkligen Koordinaten gleichwohl verschwinden zu lassen, sei gesetzt:

$$a_{\varrho\sigma\lambda\mu} = \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m}\cdot\frac{\partial\alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\lambda}\cdot\frac{\partial\alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\mu} \quad . \qquad \text{b)}$$

Es wird dann schliefslich erhalten als Lösung der Aufgabe:

$$\text{c)}\quad c^2 = \sum_1^r{}^{\varrho} \sum_1^r{}^{\sigma} \Bigg\{ a_{\varrho\sigma} p''_\varrho p''_\sigma + \sum_1^r{}^{\tau} \left(2 \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial p_\sigma} \right) p'_\varrho p'_\tau p''_\sigma + \sum_1^r{}^{\lambda} \sum_1^r{}^{\mu} a_{\varrho\sigma\lambda\mu} p'_\varrho p'_\sigma p'_\lambda p'_\mu \Bigg\} .$$

Hierin sind also die $a_{\varrho\sigma}$ die in 57 eingeführten Funktionen der p_ϱ; die $a_{\varrho\sigma\lambda\mu}$ sind als neu eingeführte Funktionen derselben Grössen anzusehen. Die Zahl dieser neu eingeführten Funktionen beträgt $\frac{1}{4} r^2(r+1)^2$.

Abschnitt 4. Mögliche und unmögliche Verrückungen. Materielle Systeme.

Erläuterungen.

109 1. Zwischen einer Anzahl von materiellen Punkten besteht ein Zusammenhang, wenn aus der Kenntnis eines Teils der Komponenten der Verrückungen dieser Punkte eine Aussage in Bezug auf die übrigen Komponenten möglich ist.

110 2. Wenn zwischen den Punkten eines Systems Zusammenhänge bestehen, so ist damit ein Teil der denkbaren Verrückungen des Systems von der Betrachtung ausgeschlossen, diejenigen Verrückungen des Systems nämlich, deren Stattfinden den vorausgesetzten Aussagen widersprechen würde. Umgekehrt bildet jede Aussage, dafs von den denkbaren Verrückungen des Systems ein Teil von der Betrachtung auszuschliefsen sei, einen Zusammenhang zwischen den Punkten des Systems. Die Zusammenhänge der Punkte eines Systems sind vollständig gegeben, wenn für jede denkbare Verrückung des Systems bekannt gegeben ist, ob dieselbe zur Betrachtung zugelassen oder von derselben ausgeschlossen sei.

3. Die zur Betrachtung zugelassenen Verrückungen heifsen mögliche Verrückungen, die übrigen unmögliche. Die möglichen Verrückungen werden auch virtuelle genannt. Mögliche Verrückungen heifsen sie stets, wenn sie als engerer Begriff den denkbaren gegenübergestellt werden; virtuelle Verrückungen werden sie nur dann genannt, wenn sie als weiterer Begriff einem engeren, z. B. den wirklichen Verrückungen entgegengestellt werden. 111

4. Mögliche Bahnen heifsen alle Bahnen, welche sich aus möglichen Verrückungen zusammensetzen. Mögliche Lagen sind alle Lagen, welche durch mögliche Bahnen erreicht werden können. 112

5. Es sind also alle Lagen möglicher Bahnen mögliche Lagen. Aber es geht aus dem Gesagten nicht hervor, und es soll auch nicht gesagt sein, dafs jede denkbare Bahn durch mögliche Lagen auch eine mögliche Bahn sei. Vielmehr kann eine Verrückung auch zwischen unendlich benachbarten möglichen Lagen als eine unmögliche Verrückung bezeichnet sein. 113

6. Zwischen zwei möglichen Lagen giebt es immer eine mögliche Bahn. Denn führt von irgend einer wirklichen Lage zu beiden Lagen auch nur e i n e mögliche Bahn, so bilden diese beiden Bahnen zusammen schon eine mögliche Bahn zwischen den beiden Lagen; führte zu einer von beiden keine mögliche Bahn, so wäre diese Lage auch keine mögliche Lage. 114

Definition 1. Ein Zusammenhang eines Systems heifst ein stetiger, wenn er den folgenden drei Voraussetzungen nicht widerspricht: 115

1. Dafs die Angabe aller möglichen endlichen Verrückungen enthalten sei in der Angabe aller möglichen unendlich kleinen Verrückungen, (Stetigkeit im Endlichen);

2. dafs jede mögliche unendlich kleine Verrückung in gerader, stetiger Bahn durchlaufen werden könne, (Stetigkeit im Unendlichkleinen);

3. dafs jede unendlich kleine Verrückung, welche aus einer bestimmten Lage möglich ist, auch möglich ist aus jeder unendlich benachbarten Lage, abgesehen von Abweichungen

von der Ordnung der Entfernung der Lagen oder von höherer Ordnung, (stetige Veränderlichkeit der möglichen Verrückungen).

116 **Folgerung.** Wenn in einem System nur stetige Zusammenhänge sich finden, so ist die Summe irgend welcher möglichen unendlich kleinen Verrückungen aus derselben Lage wieder eine mögliche Verrückung aus der gleichen Lage. (Superposition unendlich kleiner Verrückungen.)

Denn nach **115,** 3 müssen sich die einzelnen Verrückungen hinter einander durchlaufen lassen, und nach **115,** 2 ist dann die direkte Verrückung aus der Anfangs- in die Endlage selbst auch eine mögliche Verrückung.

117 **Definition 2.** Ein Zusammenhang eines Systems heifst ein innerer, wenn er nur die gegenseitige Lage der Punkte des Systems betrifft.

118 **Folgerung.** Wenn in einem System nur innere Zusammenhänge sich finden, so ist jede Verrückung des Systems, welche die Konfiguration nicht ändert, eine mögliche Verrückung, und umgekehrt.

119 **Definition 3.** Ein Zusammenhang eines Systems heifst ein gesetzmäfsiger, wenn er unabhängig von der Zeit besteht.

Ein gesetzmäfsiger Zusammenhang besteht also in der Aussage, dafs von den denkbaren Verrückungen des Systems zu jeder Zeit, oder unabhängig von der Zeit, gewisse Verrückungen möglich, andere unmöglich sind.

120 **Anmerkung.** Solange wir von der Geometrie der Systeme handeln, kommt der Unterschied zwischen gesetzmäfsigem und ungesetzmäfsigem Zusammenhange nicht in Betracht, da unsere Überlegungen die Zeit nicht enthalten. Sind die Zusammenhänge eines Systems zu zwei Zeiten verschieden, so haben wir es für unsere jetzige Betrachtung zu beiden Zeiten mit zwei verschiedenen Systemen zu thun. Es läuft praktisch auf dasselbe hinaus, wenn wir voraussetzen, dafs in diesem ersten Buche die Zusammenhänge sämtlich gesetzmäfsige seien.

121 **Definition 1.** Ein System materieller Punkte, welches keinen anderen als stetigen Zusammenhängen unterworfen ist, nennen wir ein materielles System.

Definition 2. Ein materielles System, welches keinen anderen als inneren und gesetzmäfsigen Zusammenhängen unterworfen ist, nennen wir ein freies System. 122

Definition 3. Ein materielles System, zwischen dessen möglichen Lagen alle denkbaren stetigen Übergänge zugleich auch mögliche Übergänge sind, heifst ein holonomes System. 123

Der Name soll andeuten, dafs ein solches System integralen (*ὅλος*) Gesetzen (*νόμος*) gehorcht, während die materiellen Systeme im allgemeinen nur Differentialgesetzen unterworfen sind. (Vergleiche **132** ff.)

Analytische Darstellung.

Bemerkung. Ein System materieller Punkte genügt den Bedingungen eines materiellen Systems, wenn die Differentiale seiner rechtwinkligen Koordinaten keinen anderen Bedingungen unterworfen sind als einer Anzahl homogener linearer Gleichungen, deren Koefficienten stetige Funktionen möglicher Werte der Koordinaten sind. 124

Denn die erste Art der Stetigkeit, welche die Definition (**115**) verlangt, mufs vorausgesetzt werden, wenn überhaupt von Differentialen der Koordinaten des Systems gesprochen wird; den beiden andern Arten wird durch die Einschränkung der zugelassenen Differentiale genügt.

Umkehrung. Genügt ein System materieller Punkte den Bedingungen eines materiellen Systems, so sind die Differentiale seiner rechtwinkligen Koordinaten keinen anderen Einschränkungen unterworfen, als einer Anzahl homogener linearer Gleichungen unter sich, deren Koefficienten stetige Funktionen möglicher Werte der Koordinaten sind. 125

Zum Beweise fassen wir eine mögliche Lage des Systems ins Auge und die möglichen Verrückungen aus ihr. Für eine beliebig herausgegriffene dieser Verrückungen mögen sich die $3n$ Änderungen dx_ν verhalten wie:

$$\varepsilon_{11} : \varepsilon_{12} : \dots\dots : \varepsilon_{13n} \quad .$$

(125) Verstehen wir nun unter du_1 eine ganz beliebige unendlich kleine Gröfse, so ist durch den Satz von Gleichungen:

$$dx_\nu = \varepsilon_{1\nu}\, du_1$$

ein Satz möglicher Verrückungen gegeben. Entweder sind nun in demselben alle möglichen Verrückungen überhaupt enthalten, oder dies ist nicht der Fall. Trifft letzteres zu, so wählen wir eine beliebige zweite Verrückung aus, welche nicht durch jene Form dargestellt werden kann, und es mögen für diese die $3n$ Änderungen dx_ν sich verhalten wie:

$$\varepsilon_{21} : \varepsilon_{22} : \ldots\ldots : \varepsilon_{2\,3n} \quad .$$

Verstehen wir nun unter du_2 eine zweite beliebige unendlich kleine Gröfse, so ist durch das System der Gleichungen:

$$dx_\nu = \varepsilon_{1\nu}\, du_1 + \varepsilon_{2\nu}\, du_2$$

nach Voraussetzung (116) ein allgemeinerer Satz möglicher Verrückungen gegeben. Entweder sind nun wenigstens in diesem alle möglichen Verrückungen enthalten, oder dies ist nicht der Fall. Wenn letzteres eintritt, so verfahren wir wie vorher, indem wir eine neue Gröfse du_3 einführen, und wir wiederholen das Verfahren so lange, bis es wegen Erschöpfung aller möglichen Verrückungen sich nicht wiederholen lässt. Seine Fortsetzung wird spätestens unmöglich, wenn wir $3n$ Gröfsen du_λ eingeführt haben; denn alsdann stellt die Form:

$$dx_\nu = \sum_1^{3n}{}_\lambda\, \varepsilon_{\lambda\nu}\, du_\lambda$$

alle möglichen Verrückungen des Systems auch dann dar, wenn alle denkbaren Verrückungen möglich sind, wenn also gar keine Zusammenhänge zwischen den Punkten des Systems bestehen. Im allgemeinen muss also das Verfahren notwendig früher zu Ende kommen, und es lassen sich daher alle möglichen Verrückungen des Systems darstellen durch Bedingungsgleichungen der Form:

$$dx_\nu = \sum_1^l {}_\lambda\, \varepsilon_{\lambda\nu} du_\lambda \quad , \qquad \text{a)}$$

in welcher unter allen Umständen

$$l \gtreqless 3n$$

ist. Damit aber dieser Form durch willkürlich gewählte dx_ν genügt werden könne, ist hinreichende Bedingung, dafs die dx_ν den $3n - l$ homogenen linearen Gleichungen genügen, welche durch Elimination der du_λ aus den Gleichungen a) sich ableiten lassen. Die Gröfsen $\varepsilon_{\lambda\nu}$ müssen nach **115,3** stetige Funktionen der Lage sein. Weiteren Einschränkungen als diesen brauchen aber nach **124** die dx_ν nicht unterworfen zu werden.

Anmerkung. Die Zahl und der Inhalt der Gleichungen, **126**
welche wir zwischen den dx_ν nach dem angegebenen Verfahren ableiten, ist unabhängig von der besonderen Wahl der benutzten Verrückungen.

Denn benutzen wir andere Verrückungen wie vorher, und drücken daher die dx_ν durch andere Gröfsen dv_λ aus, so können wir die Werte der dx_ν in diesen in die vorher erhaltenen Eliminationsgleichungen einsetzen. Würden dieselben nicht identisch befriedigt, so wären die dv_λ nicht unabhängig von einander, was gegen die Voraussetzung ginge, unter welcher sie bestimmt wurden. Jene Gleichungen werden also identisch befriedigt, und sie können daher nicht verschieden sein von den Gleichungen oder von linearen Kombinationen der Gleichungen, welche durch Elimination der dv_λ aus den Formen erhalten werden, in welchen sie die dx_ν darstellen. Gröfser als die Zahl der mit Hülfe der dv_λ zu erhaltenden Gleichungen kann demnach die Zahl der mit Hülfe der du_λ erhaltenen nicht sein; sie kann aber auch nicht kleiner sein, sonst würde das umgekehrte Verfahren erlauben, zu erweisen, dafs die du_λ nicht unabhängig von einander wären.

Folgerung 1. Der Zusammenhang eines materiellen Sy- **127**
stems kann analytisch vollständig beschrieben werden durch Angabe einer einzigen möglichen Lage des Systems und eines

Satzes homogener linearer Gleichungen zwischen den Differentialen seiner rechtwinkligen Koordinaten.

Denn Beziehungen zwischen diesen Differentialen können nach **125** nicht anders als durch einen solchen Satz von Gleichungen gegeben werden. Dies hindert allerdings nicht, dafs zwischen den Koordinaten auch endliche Gleichungen bestehen. Aber alle diese endlichen Gleichungen liefsen sich vollständig ersetzen durch eine einzige mögliche Lage und ebensoviele homogene lineare Gleichungen zwischen den Differentialen. Diese letzteren aber können den unmittelbar gegebenen Differentialgleichungen nicht widersprechen; sie gehen also entweder aus denselben hervor oder sind ihnen zur Erzielung einer vollständigen Beschreibung hinzuzufügen.

128 **Bezeichnung.** Die Gleichungen, welche den Zusammenhang eines materiellen Systems in den rechtwinkligen Koordinaten desselben darstellen, sollen in Zukunft dauernd in der Form geschrieben werden:

$$\sum_1^{3n} {}_\nu \, x_{\iota\nu} \, dx_\nu = 0 \quad .$$

Dabei wird angenommen, dafs i solcher Gleichungen vorhanden seien, und es sind also dem ι in den einzelnen Gleichungen die Werte 1, 2, etc. bis i beizulegen. Die Gröfsen $x_{\iota\nu}$ sind als stetige Funktionen der x_ν zu betrachten.

129 **Folgerung 2.** Der Zusammenhang eines materiellen Systems, dessen Lagen durch allgemeine Koordinaten dargestellt sind, kann analytisch vollständig beschrieben werden durch Angabe einer einzigen möglichen Lage und eines Satzes homogener linearer Gleichungen zwischen den Differentialen der Koordinaten.

Durch Benutzung der allgemeinen Koordinaten p_ϱ, deren Zahl r kleiner als $3n$ ist, ist bereits ein Zusammenhang zwischen den Punkten des Systems gesetzt. Denken wir uns deshalb den Zusammenhang zuerst nach **128** vollständig beschrieben durch die rechtwinkligen Koordinaten. In den entsprechenden Differentialgleichungen seien die Werte der dx_ν in den dp_ϱ nach Gleichung **57 b** eingetragen. Die entstehenden

linearen homogenen Gleichungen müssen sich so ordnen lassen, dass unter ihnen $3n - r$ identisch erfüllt sind infolge der $3n - r$ Gleichungen, welche ausdrücken, dafs die $3n$ Gröfsen x_ν Funktionen der r Gröfsen p_ϱ sind. Die übrig bleibenden $k = i - 3n + r$ Gleichungen zwischen den dp_ϱ ersetzen bei Benutzung der p_ϱ vollständig die sämtlichen Gleichungen zwischen den dx_ν und genügen daher, nach **127**, zusammen mit der Angabe einer möglichen Lage zur vollständigen Beschreibung des Zusammenhanges des Systems.

Bezeichnung. Die Gleichungen, welche den Zusammenhang eines materiellen Systems in den allgemeinen Koordinaten p_ϱ desselben darstellen, sollen in Znkunft dauernd in der Form geschrieben werden: **130**

$$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\, dp_\varrho = 0 \quad .$$

Die Zahl dieser Gleichungen wird gleich k angenommen, und es sind also dem $\varkappa$ nach einander die Werte 1, 2, etc. bis k zu erteilen. Die Gröfsen $p_{\varkappa\varrho}$ sind als stetige Funktionen der p_ϱ zu betrachten.

Anmerkung. Die Gleichungen **128** bez. **130** werden auch die Differentialgleichungen oder die Bedingungsgleichungen des Systems genannt werden. **131**

Lehrsatz. Lassen sich aus den Differentialgleichungen eines materiellen Systems eine gleiche Zahl von endlichen Gleichungen zwischen den Koordinaten des Systems ableiten, so ist das System ein holonomes System (123). **132**

Denn die Koordinaten einer jeden möglichen Lage müssen alsdann den endlichen Gleichungen genügen. Die Unterschiede der Koordinaten zweier benachbarter Lagen genügen also einer gleichen Zahl von homogenen linearen Differentialgleichungen, und da diese der ebenso grofsen Zahl der gegebenen Differentialgleichungen des Systems nicht widersprechen können, auch diesen letzteren. Die Verrückung zwischen irgend zwei möglichen Lagen ist also eine mögliche Verrückung, welches die Behauptung ist.

133 **Umkehrung.** Ist ein materielles System ein holonomes System, so lassen seine Differentialgleichungen eine ebenso grofse Zahl von endlichen oder Integralgleichungen zwischen den Koordinaten selbst zu.

Man betrachte von den r Koordinaten des Systems, zwischen deren Differentialen die k Gleichungen bestehen, irgend welche $r - k$, etwa die ersten $r - k$ als unabhängig veränderlich. Man gehe von einer beliebigen Anfangslage des Systems auf verschiedenen möglichen Bahnen zu einer Lage über, für welche die unabhängigen Koordinaten bestimmte Werte haben. Käme man nun mit stetig sich ändernder Bahn zu stetig sich ändernden Werten der übrigen Koordinaten, also zu verschiedenen Lagen, so wären diese Lagen mögliche Lagen, die Verrückungen zwischen ihnen also nach Voraussetzung mögliche Verrückungen. Es gäbe also von Null verschiedene Wertsysteme der Differentiale, welche den Differentialgleichungen genügen, obwohl die ersten $r - k$ dieser Differentiale gleich Null gesetzt sind. Dies ist nicht möglich, da die Gleichungen homogen und linear sind. Also kommen wir stets zu denselben Werten nicht nur der ersten $r - k$, sondern auch der übrigen Koordinaten. Die letzteren sind also bestimmte Funktionen der ersteren. Die k endlichen Gleichungen, welche dies ausdrücken, sind, da sie den Differentialgleichungen nicht widersprechen können, Integralgleichungen derselben.

Bewegungsfreiheit.

134 **Definition.** Die Zahl der willkürlich anzunehmenden unendlich kleinen Änderungen der Koordinaten eines materiellen Systems heifst die Zahl der Bewegungsfreiheiten des Systems oder auch der Grad der Freiheit seiner Bewegung.

Bemerkungen dazu.

135 1. Die Zahl der Freiheiten eines Systems ist gleich der Zahl seiner Koordinaten, vermindert um die Zahl der Differentialgleichungen des Systems.

2. Die Zahl der Freiheiten eines materiellen Systems ist unabhängig von der Wahl der Koordinaten. 136

In der Bezeichnung von **128—130** ist die Zahl der Freiheiten gleich $r - k$, also (**129**) gleich $3n - i$, also stets dieselbe Zahl, welche Zahlen auch durch r und k dargestellt sind.

3. Die Zahl der Freiheiten eines Systems ändert sich nicht mit der Lage des Systems. 137

Da der Zusammenhang ein stetiger ist, so kann sich die Zahl der Freiheiten in benachbarten Lagen nicht um ein Endliches unterscheiden, also, da eine stetige Änderung dieser Zahl ausgeschlossen ist, auch nicht in endlich entfernten Lagen.

4. Der Beweis des Satzes **125** enthält eine Lösung der Aufgabe: Die Zahl der Bewegungsfreiheiten eines vollständig bekannten materiellen Systems, allerdings nicht ohne Probieren, zu finden. Die Zahl l der nach der Methode jenes Beweises gefundenen Hülfsgröfsen du_λ ist die gesuchte Zahl. 138

Ist von vornherein bekannt, dafs die möglichen Lagen des Systems sich durch r allgemeine Koordinaten p_ϱ darstellen lassen, so können in jenem Beweise auch diese Koordinaten anstatt der x_ν benutzt werden.

Definition. Eine Koordinate eines materiellen Systems, deren Änderungen unabhängig von den Änderungen aller übrigen Koordinaten geschehen können, heifst eine freie Koordinate des Systems. 139

Folgerung. Eine freie Koordinate kommt in den Differentialgleichungen ihres Systems nicht vor, und umgekehrt ist jede Koordinate, welche in den Differentialgleichungen nicht vorkommt, eine freie Koordinate. 140

Anmerkung 1. Ob eine bestimmte Koordinate eines Systems eine freie Koordinate ist, oder nicht, hängt ab von der Wahl der übrigen, gleichzeitig benutzten Koordinaten. 141

Denn kommt eine gewisse Koordinate in den Differentialgleichungen des Systems nicht vor, und wählen wir nun an Stelle einer der Koordinaten, welche in diesen Gleichungen vorkommen, eine Funktion dieser und jener ersten als Koordi-

nate, so verliert jene erste die Eigenschaft, freie Koordinate zu sein, welche sie bis dahin hatte.

142 **Anmerkung 2.** In einem freien System ist jede Koordinate der absoluten Lage eine freie Koordinate.

Vergleiche **118** und **122**.

143 **Lehrsatz.** Lassen sich die möglichen Lagen eines materiellen Systems durch Koordinaten darstellen, welche sämtlich freie Koordinaten sind, so ist das System ein holonomes (**123**).

Jede Verrückung des Systems zwischen möglichen Lagen wird durch ein Wertsystem der Differentiale der freien Koordinaten ausgedrückt; jedes solche Wertsystem ist aber möglich, da es keinen Bedingungen unterworfen ist, und daher ist jede Verrückung zwischen möglichen Lagen eine mögliche Verrückung.

144 **Umkehrung.** In einem holonomen System lassen sich alle möglichen Lagen durch freie Koordinaten darstellen.

Hat ein holonomes System r Koordinaten, zwischen welchen k Differentialgleichungen bestehen, so lassen sich k der Koordinaten als Funktionen der übrigen $r - k$ darstellen (vergl. **133**). Diese $r - k$ willkürlich ausgewählten Koordinaten bestimmen also bereits die Lage des Systems vollständig und können unter Weglassung der übrigen Koordinaten als freie Koordinaten des Systems benutzt werden. Auch irgend welche $r - k$ Funktionen der ursprünglichen r Koordinaten können offenbar der gleichen Absicht dienen.

145 **Anmerkung 1.** Die Zahl der freien Koordinaten eines holonomen Systems ist gleich der Zahl seiner Bewegungsfreiheiten.

146 **Anmerkung 2.** Ist die Zahl der Koordinaten eines materiellen Systems gleich der Zahl seiner Bewegungsfreiheiten, so sind die Koordinaten sämtlich freie Koordinaten, und das System ist ein holonomes.

Denn bestände auch nur eine einzige Differentialgleichung zwischen den Koordinaten, so wäre schon die Zahl der Koordinaten gröſser als die der Bewegungsfreiheiten. Kleiner als

die Zahl der Bewegungsfreiheiten kann die Zahl der Koordinaten überhaupt nicht sein.

Anmerkung 3. Die möglichen Lagen eines Systems, welches kein holonomes ist, lassen sich nicht vollständig allein durch freie Koordinaten darstellen. 147

Denn das Gegenteil dieser Behauptung stände in Widerspruch zu **143**.

Verrückungen senkrecht zu den möglichen Verrückungen.

Lehrsatz. Lassen sich in einem System die r Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ einer Verrückung ds nach den Koordinaten p_ϱ darstellen durch k Gröfsen $\gamma_\varkappa$ in der Form: 148

$$d\bar{p}_\varrho = \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, \gamma_\varkappa \quad ,$$

worin die $p_{\varkappa\varrho}$ den Bedingungsgleichungen des Systems (**130**) entnommen sind, so steht die Verrückung senkrecht auf jeder möglichen Verrückung des Systems aus der gleichen Lage.

Es sei nämlich ds' die Länge einer beliebigen möglichen Verrückung aus der gleichen Lage, und es seien die dp'_ϱ die Änderungen der Koordinaten für diese Verrückung. Multiplizieren wir nun die Gleichungen der Reihe nach mit dp'_ϱ und addieren sie, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Gleichungen **85** und **130**:

$$\sum_1^r{}_\varrho\, d\bar{p}_\varrho\, dp'_\varrho = ds\, ds' \cos s,s' = \sum_1^k{}_\varkappa\, \gamma_\varkappa \sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\, dp'_\varrho = 0 \quad ,$$

also $\cos s,s' = 0$; $s,s' = 90^0$, was zu beweisen war.

Zusatz. Die r Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ einer Verrückung ds nach den Koordinaten p_ϱ sind eindeutig bestimmt durch k unter ihnen und die Angabe, dafs die Verrückung senkrecht stehe auf jeder möglichen Verrückung des Systems. 149

Es seien nämlich wieder die dp'_ϱ die Änderungen der p_ϱ für eine beliebige mögliche Verrückung. Mit Hülfe der k Bedingungsgleichungen können wir k derselben ausdrücken als

homogene lineare Funktionen der übrigen $r - k$ und diese Werte einsetzen in die Gleichung:

$$\sum_1^r {}_\varrho \, d\bar{p}_\varrho \, dp'_\varrho = 0 \quad .$$

Die in dieser Gleichung noch vorhandenen dp'_ϱ sind nun völlig willkürlich; es mufs also der Faktor einer jeden dieser Gröfsen verschwinden. Dies giebt $r - k$ homogene lineare Gleichungen zwischen den $d\bar{p}_\varrho$, welche gestatten, $r - k$ derselben als eindeutige, weil lineare Funktionen der übrigen k darzustellen.

150 **Umkehrung.** Steht eine denkbare Verrückung senkrecht auf jeder möglichen Verrückung eines Systems, so lassen sich die r Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ derselben nach den p_ϱ stets durch passende Bestimmung von k Gröfsen $\gamma_\varkappa$ darstellen in der Form:

$$d\bar{p}_\varrho = \sum_1^k {}_\varkappa \, p_{\varkappa\varrho} \, \gamma_\varkappa \quad .$$

Bestimmen wir nämlich die $\gamma_\varkappa$ aus irgend welchen k dieser Gleichungen und berechnen mit diesen Werten die sämtlichen Komponenten, so müssen wir auf die gegebenen Werte der $d\bar{p}_\varrho$ kommen. Denn die so berechnete Verrückung steht nach **148** senkrecht auf allen möglichen und hat mit der gegebenen Verrückung k Komponenten gemein, sie hat also mit derselben nach **149** alle r Komponenten nach den p_ϱ gemein.

Abschnitt 5. Von den ausgezeichneten Bahnen der materiellen Systeme.

I. Geradeste Bahnen.

Definitionen.

151 1. Ein Bahnelement eines materiellen Systems heifst gerader als ein anderes, wenn es eine geringere Krümmung hat.

152 2. Geradestes Bahnelement nennen wir ein mögliches

Bahnelement, welches gerader ist als alle anderen möglichen Bahnelemente, welche mit ihm die Lage und die Richtung gemein haben.

3. Eine Bahn, deren sämtliche Elemente geradeste Elemente sind, heifst eine geradeste Bahn. **153**

Analytische Darstellung. Alle Bahnelemente, unter welchen ein geradestes Bahnelement das geradeste ist, haben Lage und Richtung, also die Werte der Koordinaten und der ersten Differentialquotienten der Koordinaten nach der unabhängigen Variabelen gemein. Die Krümmung ist aber, aufser durch jene Werte, auch noch mitbestimmt durch die zweiten Differentialquotienten der Koordinaten. Durch die Werte dieser also unterscheiden sich jene Bahnelemente, und es müssen also für das geradeste Bahnelement die zweiten Differentialquotienten solche Funktionen der Koordinaten und ihrer ersten Differentialquotienten sein, welche die Krümmung zu einem Minimum machen. **154**

Die Gleichungen, welche diese Bedingung ausdrücken, müssen erfüllt sein für alle Lagen einer geradesten Bahn, sie sind also zugleich die Differentialgleichungen einer solchen Bahn.

Aufgabe 1. Die Differentialgleichungen der geradesten Bahnen eines materiellen Systems darzustellen in den rechtwinkligen Koordinaten des Systems. **155**

Es möge als unabhängige Variabele die laufende Bahnlänge gewählt werden. Da nur mögliche Bahnen in Betracht zu ziehen sind, unterliegen die $3n$ Grössen x'_ν nach **128** und **100** i Gleichungen von der Form:

$$\sum_1^{3n}{}_\nu\, x_{\iota\nu}\, x'_\nu = 0 \quad . \qquad \text{a)}$$

Also unterliegen die $3n$ Gröfsen x''_ν i Gleichungen von der Form:

$$\sum_1^{3n}{}_\nu\, x_{\iota\nu}\, x''_\nu + \sum_1^{3n}{}_\nu \sum_1^{3n}{}_\mu \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu}\, x'_\nu\, x'_\mu = 0 \quad , \qquad \text{b)}$$

welche durch Differentiation aus jenen folgen.

Unter der Voraussetzung, daſs diesen Gleichungen **b)** nicht widersprochen werde, sollen die Gröſsen x''_ν so bestimmt werden, daſs die Krümmung c (**106**) oder, was dasselbe sagt, daſs der Wert von $\frac{1}{2}c^2$, nämlich

c) $$\frac{1}{2}\sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m} x''^2_\nu \quad ,$$

ein Minimum werde.

Nach den Regeln der Differentialrechnung verfahren wir wie folgt: Wir multiplizieren jede der Gleichungen **b)** mit einem nachträglich zu bestimmenden Faktor, welcher für die ι te Gleichung Ξ_ι heiſsen möge; wir addieren die partiellen Differentialquotienten der linken Seiten der entstandenen Gleichungen nach einer jeden der Gröſsen x''_ν zu dem nach der gleichen Gröſse genommenen partiellen Differentialquotienten der Form **c)**, welche zu einem Minimum zu machen ist; wir setzen schlieſslich die entstandenen Aggregate gleich Null. Wir erhalten so $3n$ Gleichungen von der Form:

d) $$\frac{m_\nu}{m} x''_\nu + \sum_1^{i}{}_\iota x_{\iota\nu}\, \Xi_\iota = 0 \quad ,$$

welche zusammen mit den i Gleichungen **b)** $3n+i$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $3n+i$ Grössen x''_ν und Ξ_ι ergeben, und aus welchen sich diese Gröſsen und dann aus **c)** der Wert der kleinsten Krümmung selbst ergeben. Die Erfüllung der Gleichungen **d)** längs aller Lagen einer möglichen Bahn ist also notwendige Bedingung dafür, daſs die Bahn eine geradeste sei, und die Gleichungen **d)** sind also die verlangten Differentialgleichungen.

156 **Anmerkung 1.** Die Gleichungen **d)** sind aber auch die hinreichenden Bedingungen, zunächst für das Eintreten eines Minimums. Denn die zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 c^2}{\partial x''_\nu \partial x''_\mu}$$

verschwinden, sobald ν und μ verschieden sind, und sind notwendig positiv, sobald ν und μ gleich sind. Der Wert der Krümmung läfst also keine anderen ausgezeichneten Werte zu, als allein ein Minimum.

Die Erfüllung der Gleichungen **d)** für alle Lagen einer möglichen Bahn ist demnach auch hinreichende Bedingung dafür, dafs die Bahn eine geradeste sei.

Anmerkung 2. Unter Berücksichtigung von **72** können die Gleichungen **d)** in der Form geschrieben werden: **157**

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\frac{d}{ds}(\cos s,x_\nu) = -\sum_1^i{}_\iota\, x_{\iota\nu}\, \Xi_\iota \quad .$$

Die Gleichungen **d)** geben also an, wie sich die Richtung der Bahn beim Fortschreiten in ihrer Länge beständig ändern mufs, damit die Bahn eine geradeste bleibe; und zwar giebt eine jede einzelne Gleichung an, wie sich die Neigung der Bahn gegen eine bestimmte der rechtwinkligen Koordinaten ändert.

Aufgabe 2. Die Differentialgleichungen der geradesten Bahnen eines materiellen Systems in den allgemeinen Koordinaten des Systems auszudrücken. **158**

Wir wählen wieder als unabhängige Variabele die Bahnlänge. Die Koordinaten p_ϱ und ihre Differentialquotienten p'_ϱ genügen (**130**) den k Gleichungen

$$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\, p'_\varrho = 0 \quad , \qquad \textbf{a)}$$

also die Gröfsen p''_ϱ den Gleichungen:

$$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\, p''_\varrho + \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma} p'_\varrho p'_\sigma = 0 \quad . \qquad \textbf{b)}$$

Unter allen Werten der p''_ϱ, welche diesen Gleichungen genügen, sind diejenigen zu bestimmen, welche den Wert der

Krümmung c oder, was auf dasselbe hinausläuft, den Wert von $\frac{1}{2}c^2$, also die halbe rechte Seite der Gleichung **108c** zu einem Minimum machen. Verfahren wir nach den Regeln der Differentialrechnung wie in **155**, und nennen wir $\Pi_\varkappa$ den Faktor, mit welchem wir die $\varkappa$ te der Gleichungen **b)** multiplizieren, so erhalten wir als notwendige Bedingungen für das Minimum r Gleichungen von der Form:

$$\textbf{d)}\quad \sum_1^r{}^\sigma a_{\varrho\sigma} p''_\sigma + \sum_1^r{}^\sigma \sum_1^r{}^\tau \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho}\right) p'_\sigma p'_\tau + \sum_1^k{}^\varkappa p_{\varkappa\varrho} \Pi_\varkappa = 0 \quad ,$$

in welchen nämlich dem ϱ für jede Gleichung ein bestimmter Wert von 1 bis r zu erteilen ist. Zusammen mit den Gleichungen **b)** bilden sie $r+k$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $r+k$ Gröfsen p''_ϱ und $\Pi_\varkappa$, aus welchen sich diese Gröfsen und dann nach **108** die kleinste Krümmung bestimmen lassen. Die Erfüllung der Gleichungen **d)** längs aller Lagen einer möglichen Bahn ist die notwendige Bedingung dafür, dafs die Bahn eine geradeste sei.

159 **Anmerkung 1.** Die Erfüllung der Gleichungen **d)** ist aber auch die hinreichende Bedingung für das Eintreten eines Minimums und also einer geradesten Bahn. Denn der Ausdruck **108** ist nur eine Transformation des Ausdrucks **106** für die Krümmung; wie dieser (**156**) läfst daher auch jener nur einen einzigen ausgezeichneten Wert, und zwar ein Minimum zu.

160 **Anmerkung 2.** Nach **75** haben wir:

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}} \cos s{,}p_\varrho = \sum_1^r{}^\sigma a_{\varrho\sigma} p'_\sigma \quad ,$$

also ist:

$$\frac{d}{ds}(\sqrt{a_{\varrho\varrho}} \cos s{,}p_\varrho) = \sum_1^r{}^\sigma a_{\varrho\sigma} p''_\sigma + \sum_1^r{}^\sigma \sum_1^r{}^\tau \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} p'_\sigma p'_\tau \quad .$$

Es lassen sich daher die Gleichungen **158d** auch schreiben in der Form:

$$\frac{d}{ds}(\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\cos s,p_\varrho) = \frac{1}{2}\sum_1^r{}_\sigma\sum_1^r{}_\tau \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} p'_\sigma p'_\tau - \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, \Pi_\varkappa \quad .$$

Die Gleichungen **158d** geben also wiederum an, wie sich die Richtung der Bahn beim Fortschreiten in ihrer Länge ändern mufs, damit die Bahn eine geradeste bleibe; und zwar giebt jetzt jede einzelne Gleichung an, wie sich die Neigung gegen eine bestimmte der Koordinaten p_ϱ ändert.

Lehrsatz. Aus einer gegebenen Lage in einer gegebenen Richtung ist stets eine und nur eine geradeste Bahn möglich. 161

Denn ist eine Lage und eine Richtung in ihr gegeben, so geben die Gleichungen **155d** oder **158d** stets bestimmte, und zwar eindeutig bestimmte Werte für die Anderung der Richtung; es ist also durch die gegebenen Gröfsen eindeutig bestimmt die Anfangslage und die Richtung im nächsten Bahnelement, also auch die im Folgenden, und so fort ins Unendliche.

Folgerung. Es ist im allgemeinen nicht möglich, von einer beliebigen Lage eines gegebenen Systems zu einer beliebigen anderen Lage eine geradeste Bahn zu ziehen. 162

Denn die Mannigfaltigkeit der möglichen Verrückungen aus einer Lage ist gleich der Zahl der Bewegungsfreiheiten des Systems, die Mannigfaltigkeit der möglichen Richtungen in einer Lage und daher die Mannigfaltigkeit der geradesten Bahnen aus ihr also um die Einheit kleiner. Die Mannigfaltigkeit der Lagen, welche auf geradesten Bahnen von einer gegebenen Lage aus zu erreichen sind, ist also wieder gleich der Zahl der Freiheiten. Aber die Mannigfaltigkeit der möglichen Lagen kann der Zahl der benutzten Koordinaten gleich sein, und ist daher im allgemeinen gröfser als jene.

Bemerkung 1. Um alle geradesten Bahnen eines materiellen Systems, dessen Lagen durch die p_ϱ bezeichnet sind, durch Gleichungen zwischen eben diesen p_ϱ darstellen zu können, ist nicht die Kenntnis irgend welcher $3n$ Funktionen erforderlich, welche die Lagen der einzelnen Punkte des Systems 163

als Funktionen der p_ϱ vollständig bestimmen. Es genügt vielmehr, dafs neben den Bedingungsgleichungen des Systems in den p_ϱ die $\frac{1}{2}r(r+1)$ Funktionen $a_{\varrho\sigma}$ der p_ϱ bekannt gegeben seien.

Denn die Differentialgleichungen der geradesten Bahnen
158d können explicite hingeschrieben werden, sobald nur neben den $p_{\varkappa\varrho}$ die $a_{\varrho\sigma}$ als Funktionen der p_ϱ gegeben sind.

164 **Bemerkung 2.** Um die geradesten Bahnen eines materiellen Systems, dessen Lagen man durch die p_ϱ bezeichnet hat, durch Gleichungen zwischen eben diesen p_ϱ angeben zu können, genügt neben der Kenntnis der Bedingungsgleichungen zwischen den p_ϱ die Kenntnis der Länge einer jeden möglichen unendlich kleinen Verrückung als Funktion eben jener Koordinaten p_ϱ und deren Änderungen.

Denn ist ds der Ausdruck jener Länge in der verlangten Form, so ist

$$a_{\varrho\sigma} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 ds^2}{\partial p_\varrho \partial p_\sigma} \quad .$$

165 **Bemerkung 3.** Um den Wert der Krümmung selbst zu kennen in jeder Lage einer geradesten Bahn, genügt indessen die Kenntnis der $\frac{1}{2}r(r+1)$ Funktionen $a_{\varrho\sigma}$ nicht. Es mufs hinzukommen die Kenntnis der $\frac{1}{4}r^2(r+1)^2$ Funktionen $a_{\varrho\sigma\lambda\mu}$ (108).

Die Kenntnis der Lagen aller einzelnen Punkte als Funktionen der p_ϱ ist auch zur Ermittelung der Krümmung selbst nicht erforderlich.

2. Kürzeste und geodätische Bahnen.

166 **Definition 1.** Kürzeste Bahn eines materiellen Systems zwischen zweien seiner Lagen heifst eine mögliche Bahn zwischen diesen Lagen, deren Länge kleiner ist als die Länge irgend einer anderen, ihr unendlich benachbarten Bahn zwischen denselben Lagen.

Bemerkungen dazu.

1. Es ist durch die Definition nicht ausgeschlossen, und es kann in der That eintreten, dafs es mehrere kürzeste Bahnen zwischen zwei Lagen giebt. Die kürzeste unter diesen heifst die absolut kürzeste Bahn. Sie ist zugleich die kürzeste Bahn, welche überhaupt zwischen den beiden Lagen möglich ist. 167

2. Zwischen irgend zwei möglichen Lagen eines materiellen Systems ist stets mindestens eine kürzeste Bahn möglich. 168

Denn mögliche Bahnen sind zwischen möglichen Lagen stets vorhanden (**114**), unter ihnen also eine absolut kürzeste, welche also auch kürzer ist als ihre Nachbarn, deren sie nach der vorausgesetzten Stetigkeit (**121, 115**) besitzen mufs, welche also eine kürzeste Bahn ist.

3. Eine kürzeste Bahn zwischen zwei Lagen ist zugleich eine kürzeste Bahn zwischen irgend zwei der ihr angehörigen Lagen. Jeder Teil einer kürzesten Bahn ist wieder eine kürzeste Bahn. 169

4. Die Länge einer kürzesten Bahn unterscheidet sich nur um unendlich kleine Gröfsen höherer Ordnung von der Länge aller benachbarten Bahnen zwischen den gleichen Endlagen. Als unendlich kleine Gröfsen der ersten Ordnung gelten dabei die Längen der Verrückungen, welche nötig sind, um die benachbarten Bahnen in die kürzeste überzuführen. 170

Definition 2. Geodätische Bahn eines materiellen Systems heifst jede Bahn, deren Länge zwischen irgend zweien ihrer Lagen sich nur um unendlich kleine Gröfsen höherer Ordnung unterscheidet von der Länge irgend welcher unendlich benachbarter Bahnen zwischen den gleichen Lagen. 171

Bemerkungen dazu.

1. Jede kürzeste Bahn zwischen irgend zwei Lagen ist eine geodätische Bahn. 172

Es enthält also auch die Definition **171** nicht etwa einen inneren Widerspruch, sondern es giebt Bahnen, welche dieser Definition genügen.

173 **2.** Zwischen irgend zwei möglichen Lagen eines materiellen Systems ist stets mindestens eine geodätische Bahn möglich (**168** und **172**).

174 **3.** Eine geodätische Bahn ist nicht notwendig zugleich kürzeste Bahn zwischen irgend zweien ihrer Lagen.

Es kann aus den Definitionen nicht gefolgert werden, dafs jede geodätische Bahn auch kürzeste Bahn ist, und einfache Beispiele zeigen, dafs es in der That geodätische Bahnen giebt, welche nicht zugleich kürzeste Bahnen zwischen ihren Endlagen sind. Solche Beispiele können bereits der Geometrie des einzelnen materiellen Punktes, also der gewöhnlichen Geometrie entnommen, und also aus dieser als bekannt vorausgesetzt werden.

175 **4.** Giebt es zwischen zwei Lagen nur eine einzige geodätische Bahn, so ist dieselbe eine kürzeste, und zwar die absolut kürzeste Bahn zwischen beiden Lagen.

Denn das Gegenteil würde nach **168** und **172** der Voraussetzung widersprechen.

176 **5.** Eine geodätische Bahn ist stets kürzeste Bahn zwischen irgend zwei hinreichend benachbarten, übrigens noch endlich von einander entfernten ihrer Lagen.

Es möge zwischen zwei beliebigen Lagen der betrachteten geodätischen Bahn noch eine Anzahl weiterer geodätischer Bahnen geben. Mit einer dieser Bahnen mufs die absolut kürzeste Bahn zwischen beiden Lagen zusammenfallen (**172**). Nähern wir nun die Lagen einander längs der betrachteten geodätischen Bahn, so nähert sich die Länge dieser Bahn und zugleich die Länge der absolut kürzesten Bahn der Null, während die übrigen geodätischen Bahnen endlich bleiben. Mindestens von einem gewissen endlichen Abstand der Lagen an mufs also die geodätische Bahn, längs welcher die beiden Lagen sich nähern, mit der absolut kürzesten unter ihnen zusammenfallen.

Analytische Darstellung. Damit eine Bahn eine geodätische Bahn sei, ist die notwendige und hinreichende analytische Bedingung, dafs das Integral des Bahnelements (**99**), nämlich 177

$$\int ds \quad ,$$

genommen zwischen irgend zwei Lagen der Bahn, nicht variiere, wenn auch den Koordinaten der Lagen der Bahn beliebige stetige Variationen erteilt werden, vorausgesetzt nur, dafs 1) diese Variationen verschwinden an den jedesmaligen Grenzlagen des Integrals, und dafs 2) auch noch nach Ausführung der Variation die Koordinaten und ihre Differentiale den Bedingungsgleichungen des Systems genügen. Als notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ergiebt sich ein Satz von Differentialgleichungen, denen die Koordinaten der Bahn, gedacht als Funktionen einer beliebigen Variabelen, genügen müssen, und welche also die Differentialgleichungen der geodätischen Bahnen sind.

Dafs jene Differentialgleichungen für alle Punkte einer 178
möglichen Bahn erfüllt seien, ist nach **172** zugleich die notwendige Bedingung dafür, dafs die Bahn eine kürzeste sei, und jene Gleichungen sind daher zugleich die Differentialgleichungen der kürzesten Bahnen. Das Verschwinden der Variation des Integrals ist aber noch nicht hinreichende Bedingung dafür, dafs die Bahn zwischen seinen Endlagen eine kürzeste sei. Vielmehr ist hierzu weiter erforderlich, dafs für jede zulässige Variation der Koordinaten die zweite Variation des Integrals einen wesentlich positiven Wert habe. Für hinreichend benachbarte Lagen einer Bahn, welche den Differentialgleichungen genügt, ist diese Bedingung nach **176** stets von selber erfüllt.

Aufgabe 1. Die Differentialgleichungen der geodätischen 179
Bahnen eines materiellen Systems in den rechtwinkligen Koordinaten desselben darzustellen.

Die $3n$ rechtwinkligen Koordinaten x_ν, welche wir zunächst als Funktionen einer beliebigen Variabelen ansehen, sollen vor und nach der Variation den i Gleichungen

(179) a) $$\sum_{1}^{3n}{}_{\nu}\, x_{\iota\nu}\, dx_{\nu} = 0$$

genügen (128). Die $3n$ Variationen δx_{ν} sind also gebunden an die i Gleichungen, welche aus jenen durch Variation folgen, nämlich:

b) $$\sum_{1}^{3n}{}_{\nu}\, x_{\iota\nu}\, d\delta x_{\nu} + \sum_{1}^{3n}{}_{\nu} \sum_{1}^{3n}{}_{\mu} \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_{\mu}}\, \delta x_{\mu}\, dx_{\nu} = 0 \quad .$$

Da die Länge ds des Bahnelements nicht von den x_{ν}, sondern nur von den dx_{ν} abhängt, so ist seine Variation

$$\delta ds = \sum_{1}^{3n}{}_{\nu} \frac{\partial ds}{\partial dx_{\nu}}\, \delta dx_{\nu} = \sum_{1}^{3n}{}_{\nu} \frac{\partial ds}{\partial dx_{\nu}}\, d\delta x_{\nu} \quad .$$

Dies vorausgesetzt, soll

c) $$\delta \int ds = \int \delta ds = 0$$

gemacht werden. Nach den Regeln der Variationsrechnung multiplizieren wir jede der Gleichungen **b)** mit einer nachträglich zu bestimmenden Funktion der x_{ν}, welche für die ιte Gleichung mit ξ_{ι} bezeichnet werden möge, und addieren die Summe der linken Seiten der entstandenen Gleichungen, welche Summe gleich Null ist, zu dem variierten Element des Integrals. Durch partielle Integration schaffen wir die Differentiale der Variationen fort; endlich setzen wir den Faktor einer jeden der willkürlichen Funktionen δx_{ν} gleich Null. Wir erhalten so $3n$ Differentialgleichungen der Form:

d) $$d\left(\frac{\partial ds}{\partial dx_{\nu}}\right) + \sum_{1}^{i}{}_{\iota}\, x_{\iota\nu}\, d\xi_{\iota} - \sum_{1}^{i}{}_{\iota} \sum_{1}^{3n}{}_{\mu} \left(\frac{\partial x_{\iota\mu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_{\mu}}\right) \xi_{\iota}\, dx_{\mu} = 0 \quad ,$$

welche zusammen mit den i Gleichungen **a)** $3n+i$ Gleichungen für die $3n+i$ Funktionen x_{ν} und ξ_{ι} bilden. Diese Differential-

gleichungen sind notwendige Bedingungen für das Verschwinden der Variation des Integrals; jede geodätische Bahn genügt also denselben, und sie stellen also die gesuchte Lösung dar.

Anmerkung 1. Die Differentialgleichungen **179 d** sind aber auch hinreichende Bedingungen dafür, dafs die Bahn, welche ihnen genügt, eine geodätische Bahn sei. Denn sind jene Gleichungen erfüllt, so wird die Variation des Integrals $\int ds$ gleich den Gliedern, welche bei der partiellen Integration vor das Integralzeichen treten; es wird also in der üblichen Bezeichnungsweise, wenn mit 0 die untere, mit 1 die obere Grenze angedeutet wird: 180

$$\delta \int ds = \sum_1^{3n} {}_\nu \left[\left(\frac{\partial ds}{\partial dx_\nu} + \sum_1^i {}_\iota x_{\iota\nu} \xi_\iota \right) \delta x_\nu \right]_0^1 \quad .$$

Lassen wir also für irgend zwei Lagen der Bahn die Variationen δx_ν verschwinden, so verschwindet die Variation des Integrals zwischen jenen Lagen als Grenzwerten, und es ist daher die für geodätische Bahnen verlangte hinreichende analytische Bedingung nach **177** erfüllt.

Anmerkung 2. Benutzen wir die laufende Länge der Bahn als unabhängige Variabele, so nehmen unter Berücksichtigung von **55** und **100** die Gleichungen **179 d** nach Division durch ds die Formen an: 181

$$\frac{m_\nu}{m} x_\nu'' + \sum_1^i {}_\iota x_{\iota\nu} \xi_\iota' - \sum_1^i {}_\iota \sum_1^{3n} {}_\mu \left(\frac{\partial x_{\iota\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu} \right) \xi_\iota x_\mu' = 0 \quad , \qquad \mathbf{a)}$$

welche zusammen mit den i durch Differentiation von **179 a** erhaltenen Gleichungen:

$$\sum_1^{3n} {}_\nu x_{\iota\nu} x_\nu'' + \sum_1^{3n} {}_\nu \sum_1^{3n} {}_\mu \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu} x_\nu' x_\mu' = 0 \qquad \mathbf{b)}$$

$3n+i$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $3n+i$ Grössen x_ν'' und ξ_ι' darstellen, und also erlauben, diese Gröfsen

als eindeutige Funktionen der Gröfsen x_ν, x'_ν und ξ_ι anzugeben.

182 **Anmerkung 3.** Unter Benutzung von **72** kann den Gleichungen **181a** die Form gegeben werden:

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\frac{d}{ds}(\cos s,x_\nu) = -\sum_1^i{}_\iota\, x_{\iota\nu}\,\xi'_\iota + \sum_1^i{}_\iota \sum_1^{3n}{}_\mu \left(\frac{\partial x_{\iota\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu}\right)\xi_\iota\, x'_\mu \quad .$$

Die Gleichungen **181a** geben also an, wie sich die Richtung der Bahn bei gegebenem Anfang derselben beständig ändern mufs, damit die Bahn eine geodätische bleibe; und zwar giebt jede einzelne Gleichung an, wie sich die Neigung gegen eine bestimmte der rechtwinkligen Koordinaten ändert.

183 **Aufgabe 2.** Die Differentialgleichungen der geodätischen Bahnen eines materiellen Systems in den allgemeinen Koordinaten p_ϱ desselben darzustellen.

Die r Koordinaten p_ϱ des Systems sind gebunden an die k Gleichungen (**130**):

a) $$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\, dp_\varrho = 0$$

und also die r Variationen δp_ϱ an die Gleichungen:

b) $$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\, d\delta p_\varrho + \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma}\,\delta p_\sigma\, dp_\varrho = 0 \quad .$$

Die Länge ds einer unendlich kleinen Verrückung hängt jetzt nicht allein von den Differentialen dp_ϱ, sondern auch von den Werten der p_ϱ selbst ab, es ist also:

$$\delta ds = \sum_1^r{}_\varrho \frac{\partial ds}{\partial dp_\varrho}\, d\delta p_\varrho + \sum_1^r{}_\varrho \frac{\partial ds}{\partial p_\varrho}\,\delta p_\varrho \quad .$$

Dies vorausgesetzt, soll

c) $$\delta\int ds = \int \delta ds = 0$$

gemacht werden. Indem wir nach den Regeln der Variation verfahren, genau wie in **179**, und indem wir mit $\pi_\varkappa$ den Faktor der $\varkappa$ ten Gleichung **b)** bezeichnen, erhalten wir r Differentialgleichungen von der Form:

$$d\left(\frac{\partial ds}{\partial dp_\varrho}\right) - \frac{\partial ds}{\partial p_\varrho} + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, d\pi_\varkappa \qquad \textbf{d)}$$

$$- \sum_1^k{}_\varkappa \sum_1^r{}_\sigma \left(\frac{\partial p_{\varkappa\sigma}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma}\right) \pi_\varkappa\, dp_\sigma = 0 \quad ,$$

welche zusammen mit den Gleichungen **a)** $r + k$ Differentialgleichungen für die $r + k$ Funktionen p_ϱ und $\pi_\varkappa$ der unabhängigen Variabelen bilden. Diese Gleichungen sind notwendige Bedingungen für das Verschwinden der Variation, sind also erfüllt in allen Lagen einer geodätischen Bahn; sie enthalten demnach die Lösung der gestellten Aufgabe.

Anmerkung 1. Die Differentialgleichungen **183d** sind aber auch hinreichende Bedingungen dafür, dafs die Bahn, welche ihnen genügt, eine geodätische Bahn sei. Denn sind jene Gleichungen erfüllt, so wird die Variation der Bahnlänge (vergl. **180**): 184

$$\delta \int ds = \sum_1^r{}_\varrho \left[\left(\frac{\partial ds}{\partial dp_\varrho} + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, \pi_\varkappa\right) \delta p_\varrho\right]_0^1 \quad .$$

Lassen wir also für irgend zwei Lagen der Bahn die Variationen δp_ϱ verschwinden, so verschwindet die Variation des Integrals zwischen jenen Lagen als Grenzlagen, und es ist daher die für geodätische Bahnen verlangte analytische Bedingung erfüllt (**177**).

Anmerkung 2. Wählen wir die Bahnlänge als unabhängige Variabele, indem wir die Gleichungen **183d** durch ds dividieren und für ds seinen Wert in den p_ϱ und dp_ϱ nach **57d** einsetzen, so erhalten wir die Gleichungen der geodätischen Bahnen in der Form der r Gleichungen: 185

$$\text{a)} \left\{ \begin{aligned} &\sum_1^r{}^\sigma a_{\varrho\sigma} p_\sigma'' + \sum_1^r{}^\sigma \sum_1^r{}^\tau \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} \right) p_\sigma' p_\tau' \\ &+ \sum_1^k{}^\varkappa p_{\varkappa\varrho} \pi_\varkappa' - \sum_1^k{}^\varkappa \sum_1^r{}^\sigma \left(\frac{\partial p_{\varkappa\sigma}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma} \right) \pi_\varkappa p_\sigma' = 0 \quad , \end{aligned} \right.$$

welche zusammen mit den k aus **183a** abgeleiteten Gleichungen

$$\text{b)} \qquad \sum_1^r{}^\varrho p_{\varrho\varkappa} p_\varrho'' + \sum_1^r{}^\varrho \sum_1^r{}^\sigma \frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma} p_\varrho' p_\sigma' = 0$$

$r + k$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $r + k$ Gröfsen p_ϱ'' und $\pi_\varkappa'$ bilden, also gestatten, diese Gröfsen als eindeutige Funktionen der p_ϱ, p_ϱ' und $\pi_\varkappa$ anzugeben.

186 **Anmerkung 3.** Indem wir bei der Einführung der Bahnlänge als unabhängiger Variabele die Gleichung **92** berücksichtigen, erhalten wir die Gleichungen **185a** in der Form:

$$\frac{d}{ds}\left(\sqrt{a_{\varrho\varrho}} \cos s, p_\varrho\right) =$$

$$\frac{1}{2} \sum_1^r{}^\sigma \sum_1^r{}^\tau \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} p_\sigma' p_\tau' - \sum_1^k{}^\varkappa p_{\varkappa\varrho} \pi_\varkappa' + \sum_1^r{}^\varkappa \sum_1^r{}^\sigma \left(\frac{\partial p_{\varkappa\sigma}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma} \right) \pi_\varkappa p_\sigma' \quad .$$

Jene Gleichungen geben also wiederum an, wie sich die Richtung der Bahn mit Durchlaufung ihrer Länge ändern mufs, damit die Bahn beständig eine geodätische bleibe; und zwar giebt jede einzelne Gleichung an, wie sich die Neigung gegen eine bestimmte der Koordinaten p_ϱ ändert.

187 **Bemerkung 1.** Eine geodätische Bahn ist durch Lage und Richtung eines ihrer Elemente noch nicht bestimmt, sondern aus einer gegebenen Lage in gegebener Richtung ist im allgemeinen eine unendliche Anzahl geodätischer Bahnen möglich.

Sind uns für eine Lage der Bahn die p_ϱ, p_ϱ' und die k Gröfsen $\pi_\varkappa$ gegeben, so sind sie nach **185** auch für das nächste Element eindeutig bestimmt, und die Fortsetzung der Bahn

ist also nur in eindeutig bestimmter Weise möglich. Die Angabe der Richtung der Bahn in jener gegebenen Lage aber liefert nur die Gröfsen p_ϱ und p'_ϱ, und genügt also nicht zur Festlegung der Bahn, sondern läfst, wenn nicht besondere Verhältnisse vorliegen, noch eine $k$fache Unendlichkeit geodätischer Bahnen zu.

Bemerkung 2. Wenn die Differentialgleichungen des be- 188
trachteten Systems kein Integral zulassen, also im allgemeinen Falle, können von den $2r$ Gröfsen p_ϱ und p'_ϱ, welche eine Lage und die Richtung in dieser bestimmen, $2r-k$ willkürlich angenommen werden, nämlich die r Gröfsen p_ϱ und $r-k$ der Gröfsen p'_ϱ. Jene $2r-k$ willkürlichen Werte, zusammen mit den k willkürlichen Werten der $\pi_\varkappa$ in jener Lage können als die $2r$ willkürlichen Konstanten angesehen werden, welche zusammen mit den Differentialgleichungen **185a** eine geodätische Bahn bestimmen, und welche in den Integralen jener Gleichungen auch vorhanden sein müssen, da es nach **173** möglich sein soll, jede mögliche Lage des Systems mit jeder andern durch eine geodätische Bahn zu verbinden. Lassen nämlich die Differentialgleichungen des Systems keine endliche Beziehung zwischen den p_ϱ ableiten, so ist jedes denkbare Wertsystem dieser Gröfsen auch ein mögliches Wertsystem; eine willkürliche Anfangs- und Endlage sind also zusammen durch $2r$ willkürliche Koordinatenwerte bestimmt.

Bemerkung 3. Für jedes Integral, welches die Differential- 189
gleichungen des materiellen Systems zulassen, vermindert sich die Zahl der Konstanten, welche eine geodätische Bahn eindeutig bestimmen, um zwei.

Lassen sich nämlich aus den Bedingungsgleichungen des Systems l endliche Gleichungen zwischen den p_ϱ herleiten, so können von den r Koordinaten p_ϱ nur noch $r-l$ willkürlich angenommen werden, von den $2r$ Gröfsen p_ϱ und p'_ϱ, welche eine Lage und eine Richtung in ihr bestimmen, also nur noch $2r-l-k$. Ferner lassen sich in diesem Falle die Differentialgleichungen durch Multiplikation mit geeigneten Faktoren und Addition in solche Form bringen, dafs l derselben unmittelbar integrabele Gleichungen darstellen, nämlich diejenigen Gleichungen, welche durch Differentiation der l endlichen Be-

8*

ziehungen gewonnen werden. Für jede dieser Gleichungen, von welchen eine den Index λ haben möge, wird dann:

$$\frac{\partial p_{\lambda\sigma}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial p_{\lambda\varrho}}{\partial p_\sigma} = 0 \quad .$$

Es verschwinden dann also die entsprechenden Gröfsen π_λ aus den Gleichungen **185a**, und alle p''_ϱ und $\pi'_\varkappa$ sind bereits eindeutig bestimmt durch die $k-l$ Werte der übrigen $\pi_\varkappa$. Im Ganzen also behalten wir noch übrig $2r-2l$ willkürliche Bestimmungsstücke; zwei sind für jede endliche Gleichung verloren gegangen.

Übrigens genügen diese $2r-2l$ willkürlichen Konstanten immer noch, wie es sein mufs, um jede mögliche Lage des Systems mit jeder andern durch eine geodätische Bahn zu verbinden. Denn bestehen zwischen den p_ϱ l endliche Gleichungen, so genügt es, die Bahn so zu führen, dafs zwei ihrer Lagen mit den gegebenen Lagen je $r-l$ Koordinaten gemein haben; die Übereinstimmung in Hinsicht der übrigen wird alsdann von selbst statthaben.

3. Beziehungen zwischen geradesten und geodätischen Bahnen.

190 **Lehrsatz.** In einem holonomen System ist jede geodätische Bahn eine geradeste Bahn und auch umgekehrt jede geradeste eine geodätische Bahn.

Benutzen wir für den Beweis rechtwinklige Koordinaten. Ist das System ein holonomes, so läfst sich den i Bedingungsgleichungen desselben durch Multiplikation mit geeigneten Faktoren und Addition in geeigneter Ordnung eine solche Form geben, in welcher jede derselben ohne weiteres integrierbar ist, in welcher nämlich die linke Seite einer jeden mit dem exakten Differentiale eines der i Integrale der Gleichungen zusammenfällt. Für jedes Wertsystem der ι, μ, ν ist alsdann:

a) $$\frac{\partial x_{\iota\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu} = 0 \quad ,$$

und die Differentialgleichungen der geodätischen Bahnen werden alsdann nach **181a**:

$$\frac{m_\nu}{m} x_\nu'' + \sum_1^i \iota\, x_{\iota\nu}\, \xi_\iota' = 0 \quad . \qquad \text{b)}$$

Dieselben unterscheiden sich offenbar nur in der Bezeichnung von den Gleichungen der geradesten Bahnen (**155d**):

$$\frac{m_\nu}{m} x_\nu'' + \sum_1^i \iota\, x_{\iota\nu}\, \Xi_\iota = 0 \quad , \qquad \text{c)}$$

da weder die ξ_ι noch die Ξ_ι in den übrigen zu befriedigenden Gleichungen vorkommen. Jede mögliche Bahn, welche nach geeigneter Bestimmung der ξ_ι den ersten dieser Gleichungen genügt, genügt den zweiten, indem man setzt $\Xi_\iota = \xi_\iota'$, und nicht minder ist jede Lösung der zweiten zugleich eine Lösung der ersten. Die Befriedigung der Gleichungen **b)** und **c)** ist aber schon hinreichende Bedingung dafür, dafs die Bahn eine geodätische, bez. eine geradeste sei.

Folgerung 1. In einem holonomen System ist aus einer möglichen Lage in einer möglichen Richtung nur eine einzige geodätische Bahn möglich (**161**). 191

Folgerung 2. In einem holonomen System ist zwischen irgend zwei möglichen Lagen immer mindestens eine geradeste Bahn möglich (**173**). 192

Lehrsatz. Ist in einem materiellen System jede geodätische Bahn zugleich eine geradeste Bahn, so ist das System ein holonomes. 193

Denn von jeder möglichen Lage aus ist in gegebener Richtung nach **161** nur eine einzige geradeste, also nach Voraussetzung nur eine einzige geodätische Bahn möglich. Gleichwohl ist nach **173** jede mögliche Lage durch eine dieser Bahnen zu erreichen. Es ist also die Zahl der Bewegungsfreiheiten des Systems gleich der Zahl seiner unabhängigen Koordinaten, also nach **146** das System ein holonomes.

194 **Folgerung.** In einem System, welches kein holonomes ist, ist im allgemeinen eine geodätische Bahn nicht zugleich eine geradeste Bahn.

Dies geht übrigens schon daraus hervor, daſs in jeder Richtung nur eine geradeste, aber viele geodätische Bahnen möglich sind (**161** und **187**).

195 **Bemerkung.** In einem Systeme, welches kein holonomes ist, ist eine geradeste Bahn im allgemeinen nicht zugleich eine geodätische Bahn.

Die Behauptung ist bewiesen, sobald Beispiele von Systemen vorgezeigt werden, in welchen sich die geradesten Bahnen nicht unter den geodätischen finden. Nehmen wir deshalb der Einfachheit halber an, es bestehe nur eine einzige nicht integrierbare Bedingungsgleichung zwischen den r Koordinaten p_ϱ des Systems, und es sei dieselbe:

a) $$\sum_1^r{}^\varrho\, p_{1\varrho} p'_\varrho = 0 \quad .$$

Machen wir nun die Annahme, es sei jede geradeste Bahn zugleich eine geodätische. Dann lieſse sich für jedes mögliche Wertsystem der p_ϱ und p'_ϱ mindestens ein Wertsystem der p''_ϱ so bestimmen, daſs zugleich den Gleichungen **158d** und **185a** genügt ist. Es müſsten daher auch für alle möglichen p_ϱ und p'_ϱ die durch paarweise Subtraktion jener Gleichungen zu erhaltenden Gleichungen

$$p_{1\varrho}(\Pi_1 - \pi'_1) + \pi_1 \sum_1^r{}^\sigma \left(\frac{\partial p_{1\sigma}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial p_{1\varrho}}{\partial p_\sigma}\right) p'_\sigma = 0$$

zu befriedigen sein. Dies sind aber r Gleichungen für die eine Gröſse $(\Pi_1 - \pi'_1)/\pi_1$, und sie sind nur verträglich mit einander, wenn für alle Wertpaare der ϱ und τ

$$\frac{1}{p_{1\varrho}} \sum_1^r{}^\sigma \left(\frac{\partial p_{1\sigma}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial p_{1\varrho}}{\partial p_\sigma}\right) p'_\sigma = \frac{1}{p_{1\tau}} \sum_1^r{}^\sigma \left(\frac{\partial p_{1\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{\partial p_{1\tau}}{\partial p_\sigma}\right) p'_\sigma$$

ist. Drücken wir in $r-1$ von einander unabhängigen dieser

Gleichungen eine der Gröfsen p'_ϱ mit Hülfe von Gleichung **a)** durch die übrigen aus, so sind die Verhältnisse zwischen den letzteren nun völlig willkürliche Gröfsen. Der Koefficient jeder einzelnen dieser Gröfsen mufs also für sich verschwinden. Wir erhalten so als notwendige Folge unserer Annahme im ganzen $(r-1)^2$ Gleichungen zwischen den r Funktionen $p_{1\varrho}$ und ihren r^2 partiellen ersten Differentialquotienten. In besonderen Fällen können diese Gleichungen sämtlich befriedigt sein, denn sie sind befriedigt, wenn die Gleichung **a)** integrabel ist. Aber im allgemeinen haben wir kein Recht, die Funktionen $p_{1\varrho}$ auch nur einer einzigen Bedingung unterworfen vorauszusetzen, und im allgemeinen war also unsere Annahme unzulässig. Damit ist die Behauptung erwiesen.

Ergebnis. (**190** bis **195**). In holonomen Systemen decken **196**
sich die Begriffe der geradesten und der geodätischen Bahnen dem Inhalt nach vollständig; in nichtholonomen Systemen schliefst keiner dieser Begriffe den andern ein, sondern beide haben im allgemeinen vollständig verschiedenen Inhalt.

Abschnitt 6. Von der geradesten Entfernung in holonomen Systemen.

Vorbemerkungen.

1. In diesem Abschnitt soll nur von holonomen Systemen **197**
die Rede sein und unter einem System schlechthin also ein holonomes verstanden werden. Es kann daher, und es soll vorausgesetzt werden, dafs die benutzten Koordinaten p_ϱ des Systems sämtlich freie Koordinaten sind. Die Zahl dieser Koordinaten ist gleich der Zahl der Bewegungsfreiheiten des Systems, also unabhängig von unserer Willkür; wir bezeichnen sie dauernd mit r.

2. Geradeste und geodätische Bahnen fallen in die- **198**
sem Abschnitt zusammen (**196**), und die gemeinsamen Diffe-

rentialgleichungen dieser Bahnen können geschrieben werden in der Form der r Gleichungen:

$$d\left(\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\cos s,p_\varrho\right) = \frac{\partial ds}{\partial p_\varrho} \quad ,$$

welche man aus **186** oder aus **160** erhält, indem man bedenkt, dafs für die gewählten Koordinaten die sämtlichen Gröfsen $p_{\varkappa\varrho}$ gleich Null sind.

199 3. Zufolge derselben Bemerkung erhält man für die Variation der Länge einer Bahn, welche den vorstehenden Differentialgleichungen genügt, also der Länge einer geodätischen Bahn, aus **184**:

$$\delta\int ds = \sum_1^r{}_\varrho \left[\frac{\partial ds}{\partial dp_\varrho}\,\delta p_\varrho\right]_0^1 \quad ,$$

oder unter Berücksichtigung von **92**:

$$\delta\int ds = \sum_1^r{}_\varrho \left[\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\cos s,p_\varrho\,\delta p_\varrho\right]_0^1 \quad ,$$

in welchen Gleichungen also die δp_ϱ die Variationen der Koordinaten der Endlage, und die $\cos s,p_\varrho$ die Richtungscosinus der Endelemente der betrachteten geodätischen Bahn bezeichnen.

I. Flächen von Lagen.

200 **Definition.** Unter einer Fläche von Lagen verstehen wir im allgemeinen eine stetig zusammenhängende Gesamtheit von Lagen. Im besonderen aber soll hier unter einer Fläche eine Gesamtheit möglicher Lagen eines holonomen Systems verstanden sein, welche dadurch charakterisiert ist, dafs die Koordinaten der ihr angehörigen Lagen einer einzigen endlichen Gleichung unter sich genügen.

Die Gesamtheit der Lagen, welche gleichzeitig zweien

oder mehr Flächen angehören, bezeichnen wir auch als den Durchschnitt jener zwei oder mehr Flächen.

Anmerkung 1. Durch jede Lage einer Fläche kann eine unendliche Mannigfaltigkeit von Bahnen gezogen werden, deren sämtliche Lagen der Fläche angehören. Wir sagen von diesen Bahnen, dafs sie der Fläche angehören, oder in der Fläche liegen; wir brauchen die gleiche Ausdrucksweise für die Elemente der Bahnen und für unendlich kleine Verrückungen überhaupt. 201

Anmerkung 2. Eine Bahn, welche nicht einer Fläche angehört, hat mit dieser im allgemeinen eine endliche Anzahl von Lagen gemeinsam. 202

Denn die Bahn wird analytisch dargestellt durch $r-1$ Gleichungen zwischen den Koordinaten ihrer Lagen, die Fläche durch eine einzige Gleichung. Nach Voraussetzung sind erstere Gleichungen unabhängig von der letzteren. Alle zusammen bilden sie daher r Gleichungen für die r Koordinaten der gemeinsamen Lagen, welche Gleichungen im allgemeinen keine oder eine endliche Zahl reeller Lösungen zulassen.

Anmerkung 3. Aus jeder Lage einer Fläche ist eine $(r-1)$fache Mannigfaltigkeit unendlich kleiner Verrückungen in der Fläche möglich. 203

Denn von den r unabhängigen Änderungen der Koordinaten, welche die Verrückung charakterisieren, können $r-1$ willkürlich angenommen werden, die r te ist dann dadurch bestimmt, dafs die Verrückung der gegebenen Fläche angehören soll.

Lehrsatz 1. Es ist stets eine, und im allgemeinen nur eine Richtung anzugeben möglich, welche auf $r-1$ verschiedenen unendlich kleinen Verrückungen eines Systems (197) aus derselben Lage senkrecht steht. 204

Es sei $d_\tau p_\varrho$ die Änderung der Koordinate p_ϱ für die τ te jener $r-1$ Verrückungen; es sei δp_ϱ die Änderung der Koordinate p_ϱ für eine weitere Verrückung. Soll die letztere anf jenen senkrecht sein, so ist notwendig und hinreichend, dafs $r-1$ Gleichungen der Form (58)

$$\sum_1^r {}^\varrho \sum_1^r {}^\sigma a_{\varrho\sigma} d_\tau p_\varrho \, \delta p_\sigma = 0$$

erfüllt seien. Dies sind aber $r-1$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $r-1$ Verhältnisse der δp_ϱ unter sich; sie können also stets, und zwar im allgemeinen nur durch ein Wertsystem dieser Verhältnisse befriedigt werden. In Ausnahmefällen kann Unbestimmtheit eintreten; solche mufs z. B. dann eintreten, wenn irgend drei der $r-1$ Verrückungen so gewählt sind, dafs jede Verrückung, welche auf zwei von ihnen senkrecht ist, auch auf der dritten senkrecht steht.

205 **Lehrsatz 2.** Steht eine Richtung senkrecht auf $r-1$ verschiedenen Verrückungen, welche einer Fläche in einer bestimmten Lage angehören, so steht sie senkrecht auf jeder Verrückung, welche der Fläche in dieser Lage angehört.

Die Verrückungen, welche einer Fläche in einer bestimmten Lage angehören, sind dadurch charakterisiert, dafs die entsprechenden dp_ϱ einer einzigen homogenen linearen Gleichung unter sich genügen, der Gleichung nämlich, welche durch Differentiation der Gleichung der Fläche erhalten wird. Genügen nun die $r-1$ Wertsysteme der $d_\tau p_\varrho$ jener Gleichung, so genügen auch die Gröfsen

$$dp_\varrho = \sum_1^{r-1} {}^\tau \lambda_\tau \, d_\tau p_\varrho$$

derselben, worin die λ_τ willkürliche Faktoren bezeichnen. Die dp_ϱ gehören also einer beliebigen Verrückung in der Fläche an, und zwar kann jede Verrückung der Fläche in dieser Form dargestellt werden, da die rechte Seite der Gleichung eine $(r-1)$ fache willkürliche Mannigfaltigkeit enthält.

Nach Voraussetzung ist nun (204):

$$\sum_1^r {}^\varrho \sum_1^r {}^\sigma a_{\varrho\sigma} d_\tau p_\varrho \, \delta p_\sigma = 0 \quad ;$$

durch Multiplikation dieser Gleichungen mit den λ_τ und Addition folgt:

$$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma a_{\varrho\sigma} dp_\varrho \, \delta p_\sigma = 0 \quad ,$$

welches die Behauptung ist (58).

Definition. Eine Verrückung aus einer Lage einer Fläche heifst senkrecht auf der Fläche, wenn sie senkrecht steht auf jeder Verrückung, welche in der gleichen Lage der Fläche angehört. 206

Folgerung 1. In jeder Lage einer Fläche giebt es stets eine, und im allgemeinen nur eine Richtung, welche senkrecht auf der Fläche steht. 207

Folgerung 2. In jeder Lage einer Fläche ist stets eine, und im allgemeinen nur eine geradeste Bahn auf der Fläche senkrecht zu errichten möglich. 208

Definition 1. Schar von Flächen nennen wir eine Gesamtheit von Flächen, deren Gleichungen (200) sich nur unterscheiden durch den Wert einer in ihnen vorkommenden Konstanten. 209

Bezeichnung. Jede Schar von Flächen kann analytisch dargestellt werden durch eine Gleichung der Form: 210

$$R = \text{constans} \quad ,$$

welche nämlich erhalten wird durch Auflösung der Gleichung einer der Flächen nach der variierenden Konstanten, und in welcher die rechte Seite die möglichen Werte eben dieser Konstanten, die linke Seite aber eine Funktion der Koordinaten p_ϱ bezeichnet. Jeder Fläche jener Schar entspricht ein bestimmter Wert der rechts stehenden Konstanten, also ein bestimmter Wert der Funktion R. Solche Flächen, für welche die Werte der Funktion R nur unendlich kleine Unterschiede dR zeigen, nennen wir Nachbarflächen.

Definition 2. Senkrechte Trajektorie einer Schar von Flächen nennen wir eine Bahn, welche die Schar senkrecht durchschneidet, d. h. welche auf jeder Fläche der Schar in den gemeinsamen Lagen (202) senkrecht steht. 211

212 **Lehrsatz.** Damit eine Bahn senkrechte Trajektorie der Schar

a) $$R = \text{constans}$$

sei, ist hinreichende und notwendige Bedingung, dafs sie in jeder ihrer Lagen r Gleichungen der Form

b) $$\sqrt{a_{\varrho\varrho}} \cos s,p_\varrho = f \frac{\partial R}{\partial p_\varrho}$$

genüge, in welchen die s,p_ϱ die Neigungen der Bahn gegen die Koordinaten p_ϱ bezeichnen, und in welchen f eine für alle r Gleichungen identische, übrigens mit der Lage sich ändernde Funktion der p_ϱ ist.

Wir konstruieren von der betrachteten Lage der Bahn aus eine unendlich kleine Verrückung, deren Länge $\delta\sigma$ sei, bei deren Durchlaufung sich die p_ϱ um δp_ϱ und R um δR ändern möge, welche endlich mit der betrachteten Bahn den Winkel s,σ bilden möge. Multiplizieren wir die Gleichungen **b)** der Reihe nach mit den δp_ϱ und addieren, so folgt (78a und 85):

c) $$\delta\sigma \cos s,\sigma = \sum_1^r {}_\varrho f \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \delta p_\varrho = f \delta R \quad .$$

Gehört nun die Verrückung $\delta\sigma$ einer Fläche der Schar **a)** an, nämlich derjenigen Fläche, welche die betrachtete Lage mit der Bahn gemeinsam hat, so ist $\delta R = 0$, also $s,\sigma = 90^0$. Die Richtung der Bahn steht daher senkrecht auf der durchschnittenen Fläche (206), und die Gleichungen **b)** bilden die hinreichenden Bedingungen dafür, dafs dies in jeder Lage eintrete. Sie bilden aber auch die notwendigen Bedingungen hierfür, da, von Ausnahmefällen abgesehen, in jeder Lage nur eine einzige Richtung der gestellten Forderung genügt.

213 **Zusatz 1.** Der senkrechte Abstand zweier Nachbarflächen der betrachteten Schar in irgend einer Lage ist gleich

$$f dR \quad .$$

Denn lassen wir die Verrückung $\delta\sigma$ des vorigen Beweises nach Richtung und Länge jetzt zusammenfallen mit dem Teil der senkrechten Trajektorie, welcher zwischen beiden Flächen liegt, so fällt $\delta\sigma$ zusammen mit dem betrachteten Abstand, der Winkel s,σ aber wird Null, und so folgt aus Gleichung **212c** die Behauptung.

Zusatz 2. Die in den Gleichungen der senkrechten Trajektorien auftretende Funktion f wird erhalten als Wurzel der Gleichung: 214

$$\frac{1}{f^2} = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \, b_{\varrho\sigma} \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \frac{\partial R}{\partial p_\sigma} \quad .$$

Denn diese Gleichung folgt, wenn wir die Werte der r Richtungscosinus nach **212b** einsetzen in die Gleichung 88, welcher sie genügen müssen. Welche Wurzel zu wählen sei, hängt davon ab, ob wir die Richtung der Trajektorie nach wachsenden Werten von R oder nach abnehmenden als positiv rechnen.

2. Geradeste Entfernung.

Definition. Geradeste Entfernung zweier Lagen eines holonomen Systems heifst die Länge einer sie verbindenden geradesten Bahn. 215

Anmerkung. Zwei Lagen können mehr als eine geradeste Entfernung haben. Unter diesen finden sich die Längen der kürzesten Bahnen zwischen beiden Lagen, also auch die Länge der absolut kürzesten Bahn. Wenn von der geradesten Entfernung zweier Lagen als einer eindeutig bestimmten gesprochen wird, so soll von dieser letzteren die Rede sein. 216

Analytische Darstellung. Die geradeste Entfernung zweier Lagen kann als Funktion der Koordinaten dieser Lagen dargestellt werden. Diejenige Lage, welche als Ausgangslage betrachtet wird, werde dauernd mit 0, ihre Koordinaten mit $p_{\varrho 0}$ bezeichnet; diejenige Lage, welche als Endlage betrachtet 217

wird, werde dauernd mit 1, ihre Koordinaten mit p_{ϱ_1} bezeichnet, so dafs die Richtung der geradesten Bahn stets positiv gerechnet ist von 0 gegen 1. Die geradeste Entfernung ist alsdann eine für alle Wertsysteme der p_{ϱ_0} und p_{ϱ_1} definierte Funktion dieser $2r$ Gröfsen. Den analytischen Ausdruck der geradesten Entfernung, ausgedrückt in eben diesen Variabelen, bezeichnen wir durch S, und nennen diesen analytischen Ausdruck auch kurz die geradeste Entfernung des Systems.

218 **Anmerkung 1.** Die Funktion S ist im allgemeinen eine mehrdeutige Funktion ihrer Unabhängigen. Von den Zweigen dieser Funktion verschwindet einer und nur einer zugleich mit verschwindendem Unterschiede zwischen den p_{ϱ_1} und p_{ϱ_0}. Von diesem Zweig ist (**216**) die Rede in solchen Aussagen, in welchen von S als von einer eindeutig bestimmten Funktion gesprochen wird.

219 **Anmerkung 2.** Die Funktion S ist symmetrisch in Hinsicht der p_{ϱ_1} und p_{ϱ_0} in dem Sinne, dafs S seinen Wert nicht ändert, wenn die p_{ϱ_1} und p_{ϱ_0} für alle Werte des ϱ gleichzeitig mit einander vertauscht werden.

Denn mit dieser Vertauschung vertauschen wir nur die Anfangs- und die Endlage.

220 **Bemerkung.** Wenn die geradeste Entfernung eines Systems in irgend welchen freien Koordinaten desselben gegeben ist, so sind damit die sämtlichen geradesten Bahnen des Systems in eben diesen Koordinaten gegeben, ohne dafs eine weitere Kenntnifs darüber nötig wäre, in welcher Weise die Lage der einzelnen materiellen Punkte des Systems von jenen Koordinaten abhängt.

Denn die geradeste Entfernung irgend zweier unendlich benachbarter Lagen des Systems ist zugleich die Länge der unendlich kleinen Verrückung zwischen ihnen; läfst sich aber diese letztere durch die gewählten Koordinaten darstellen, so trifft die Behauptung zu nach **163**.

221 **Aufgabe.** Aus der geradesten Entfernung eines Systems den Ausdruck für die Länge seiner unendlich kleinen Verrückungen abzuleiten.

In S setzen wir für die p_{ϱ_0} jetzt p_ϱ, für die p_{ϱ_1} jetzt $p_\varrho + dp_\varrho$, und lassen alsdann die dp_ϱ sehr klein werden. Wir wissen bereits (57d), daſs sich alsdann die Entfernung der beiden Lagen als Quadratwurzel einer homogenen quadratischen Funktion der dp_ϱ darstellt. S selbst läſst sich also nicht in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen der dp_ϱ entwickeln, wohl aber S^2, und in dieser Entwickelung müssen die quadratischen Glieder die ersten sein, welche nicht verschwinden. Drücken wir also durch einen übergesetzten Strich aus, daſs in der betreffenden Funktion die $p_{\varrho_0} = p_{\varrho_1} = p_\varrho$ gesetzt werden sollen, so erhalten wir für die Entfernung der beiden Lagen, also für die Gröſse der Verrückung:

$$ds^2 = \frac{1}{2} \sum_1^r {}_\varrho \sum_1^r {}_\sigma \overline{\frac{\partial^2 S^2}{\partial p_{\varrho_1} \partial p_{\sigma_1}}} dp_\varrho \, dp_\sigma$$

und es wird also die Funktion $a_{\varrho\sigma}$:

$$a_{\varrho\sigma} = \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial^2 S^2}{\partial p_{\varrho_1} \partial p_{\sigma_1}}} \quad .$$

Mit gleichem Rechte wird auch erhalten:

$$a_{\varrho\sigma} = \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial^2 S^2}{\partial p_{\varrho_0} \partial p_{\sigma_0}}} \quad .$$

Diese Werte der $a_{\varrho\sigma}$ kann man benutzen, um indirekt von der Funktion S zu den geradesten Bahnen zu gelangen. Die folgenden Lehrsätze bieten einen direkteren Weg zu dem gleichen Ziele dar.

Lehrsatz. Eine Fläche, deren sämtliche Lagen gleiche geradeste Entfernung haben von einer festen Lage, wird senkrecht durchschnitten von allen geradesten Bahnen, welche durch jene feste Lage gehen. 222

Es seien die p_{ϱ_0} die Koordinaten der festen Lage, die p_{ϱ_1} die Koordinaten einer Lage der Fläche. Wir gehen von der letzteren zu einer anderen Lage der Fläche über, für

welche die p_{ϱ_1} sich geändert haben um dp_{ϱ_1}. Dabei hat sich die geradeste Entfernung von der festen Lage 0 nach der Voraussetzung um Nichts geändert; nach **199** aber hat sie sich geändert um $\sum_1^r {}_\varrho \sqrt{a_{\varrho\varrho_1}} \cos s{,}p_{\varrho_1}\, dp_{\varrho_1}$, wenn $s{,}p_{\varrho_1}$ den Winkel bezeichnet, welchen die geradeste Bahn in 1 mit der Richtung von p_ϱ bildet. Es ist also:

$$\sum_1^r {}_\varrho \sqrt{a_{\varrho\varrho_1}} \cos s{,}p_{\varrho_1}\, dp_{\varrho_1} = 0 \quad ,$$

und diese Gleichung sagt aus, dafs die geradeste Bahn auf der Verrückung der dp_{ϱ_1} senkrecht steht (**85** und **78 a**). Da dies gilt für jede beliebige Verrückung, welche in 1 der Fläche angehört, so folgt (**206**) die Behauptung.

223 **Folgerung 1.** Die geradesten Bahnen, welche durch eine feste Lage hindurch gehen, sind die senkrechten Trajektorien einer Schar von Flächen, welche der Bedingung genügen, dafs die sämtlichen Lagen einer jeden gleiche geradeste Entfernung von jener festen Lage haben.

224 **Folgerung 2.** Die sämtlichen geradesten Bahnen, welche durch die feste Lage 0 hindurch gehen, genügen den r Gleichungen:

a) $$\sqrt{a_{\varrho\varrho_1}} \cos s{,}p_{\varrho_1} = \frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_1}} \quad ,$$

in welchen die p_{ϱ_1} als die Koordinaten der variabelen Lage der Bahn und die $\cos s{,}p_{\varrho_1}$ als die Richtungscosinus der Bahn in dieser Lage zu betrachten sind.

Denn die Gleichungen **a)** sind die Gleichungen der senkrechten Trajektorien einer Schar von Flächen, welche durch die Gleichung

b) $$S = \text{constans}$$

dargestellt wird. Wäre nämlich S eine beliebige Funktion

der variabelen Koordinaten p_{ϱ_1}, so wären nach **212** die Gleichungen der senkrechten Trajektorien:

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho_1}} \cos s,p_{\varrho_1} = f \frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_1}} \quad , \qquad \text{c)}$$

und der senkrechte Abstand zweier Nachbarflächen wäre gleich $f dS$. Nach der besonderen Natur unserer Funktion S (**217**, **222**) ist aber dieser Abstand gleich dS selbst, also folgt

$$f = 1 \quad , \qquad \text{d)}$$

und die allgemeinen Gleichungen **c)** nehmen die besondere Form **a)** an.

Anmerkung 1. Die Gleichungen **224a**, welche Differentialgleichungen erster Ordnung sind, können auch angesehen werden als die Gleichungen geradester Bahnen in endlicher Form, sobald wir nämlich in denselben die p_{ϱ_0} als die Variabelen, die $2r$ Gröfsen p_{ϱ_1} und s,p_{ϱ_1} aber als Konstanten betrachten. **225**

Denn bestimmen wir aus jenen Gleichungen eine Reihe von Lagen 0 in solcher Weise, dafs bei festgehaltenen Werten der p_{ϱ_1} auch die Werte der s,p_{ϱ_1} unverändert bleiben, so erhalten wir solche Lagen 0, von welchen aus die nach der Lage 1 gezogenen geradesten Bahnen in dieser Lage 1 eine feste Richtung haben. Da nun aber nur eine einzige geradeste Bahn von dieser Eigenschaft möglich ist, so müssen alle so bestimmten Lagen 0 dieser einen Bahn angehören, ihre Gesamtheit bildet diese Bahn, und diese letztere wird also selbst dargestellt durch die Gleichungen **224a**.

Anmerkung 2. Im Beweise des Lehrsatzes **222** hätten wir mit gleichem Rechte die Lage 1 als die feste, die Lage 0 als die variabele Lage einführen können. Anstatt zu den Gleichungen **224a** wären wir alsdann gelangt zu den Gleichungen: **226**

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho_0}} \cos s,p_{\varrho_0} = - \frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_0}} \quad . \qquad \text{a)}$$

Der Unterschied im Vorzeichen der rechten Seite erklärt sich daraus, dass nunmehr das Fortschreiten von der festen Lage aus nach **217** als Fortschreiten in negativer Richtung zu bezeichnen ist. Wie die Gleichungen **224a** stellen auch die Gleichungen **226a** geradeste Bahnen dar. Es sind Differentialgleichungen erster Ordnung aller geradesten Bahnen, welche durch die feste Lage der p_{ϱ_1} hindurchgehen, und zugleich die endlichen Gleichungen der einen bestimmten Bahn, welche durch die Lage p_{ϱ_0} hindurchgeht und in dieser mit den Koordinaten die Winkel s,p_{ϱ_0} bildet.

227 **Folgerung 3.** Die geradeste Entfernung S eines Systems genügt als Funktion der p_{ϱ_0} der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

a) $$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \, b_{\varrho\sigma_0} \frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_0}} \frac{\partial S}{\partial p_{\sigma_0}} = 1 \quad ,$$

und ebenso als Funktion der p_{ϱ_1} der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

b) $$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \, b_{\varrho\sigma_1} \frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_1}} \frac{\partial S}{\partial p_{\sigma_1}} = 1 \quad .$$

Denn beide Gleichungen folgen aus **214** und **224d**; sie werden auch unmittelbar erhalten, indem man die Richtungscosinus einer geradesten Bahn, ausgedrückt durch S nach **224a** oder **226a**, einsetzt in die Gleichung **88**, welcher die Winkel einer jeden beliebigen Richtung mit den Koordinaten genügen.

228 **Lehrsatz.** Errichtet man in allen Lagen einer beliebigen Fläche geradeste Bahnen senkrecht zur Fläche, und trägt auf allen die gleiche Länge ab, so wird die so erhaltene neue Fläche von jenen geradesten Bahnen ebenfalls senkrecht durchschnitten.

Die Lagen der ursprünglichen Fläche seien mit 0, die der neu construierten mit 1 bezeichnet. Es seien die s,p_{ϱ_0} bez. s,p_{ϱ_1} die Winkel, welche eine bestimmte der geradesten Bahnen an der ersten bez. an der zweiten Fläche mit den

Koordinaten bildet. Gehen wir von dieser geradesten Bahn zu irgend einer benachbarten über, so ändert sich die Länge der Bahn nach **199** um

$$\sum_1^r \varrho \sqrt{a_{\varrho\varrho_1}} \cos s, p_{\varrho_1}\, dp_{\varrho_1} - \sum_1^r \varrho \sqrt{a_{\varrho\varrho_0}} \cos s, p_{\varrho_0}\, dp_{\varrho_0} \quad ,$$

wenn die dp_{ϱ_1} und dp_{ϱ_0} die Änderungen der p_ϱ in den Lagen 1 und 0 bezeichnen. Nach der Konstruktion ist aber diese Änderung gleich Null, und ebenso ist nach der Konstruktion

$$\sum_1^r \varrho \sqrt{a_{\varrho\varrho_0}} \cos s, p_{\varrho_0}\, dp_{\varrho_0} = 0 \quad ,$$

da ja die Bahn auf der ursprünglichen Fläche senkrecht steht. Daher ist nun auch

$$\sum_1^r \varrho \sqrt{a_{\varrho\varrho_1}} \cos s, p_{\varrho_1}\, dp_{\varrho_1} = 0 \quad ,$$

und da die dp_{ϱ_1} jede beliebige Verrückung in der Fläche der Lagen 1 bezeichnen können, so ist damit die Behauptung erwiesen.

Folgerung 1. Die senkrechten Trajektorien einer be- **229**
liebigen Schar von Flächen, von welchen jede in allen ihren Lagen denselben senkrechten geradesten Abstand von ihren Nachbarflächen hat, sind geradeste Bahnen.

Folgerung 2. Ist R eine Funktion der r Koordinaten **230**
p_ϱ von solcher Beschaffenheit, dafs die Gleichung

$$R = \text{constans} \qquad \textbf{a)}$$

eine Schar von Flächen darstellt, deren jede von ihren Nachbarn in allen Lagen den gleichen senkrechten geradesten Abstand dR hat, so sind die Gleichungen:

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}} \cos s, p_\varrho = \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \qquad \textbf{b)}$$

die Gleichungen der senkrechten Trajektorien, also die Gleichungen geradester Bahnen. Und zwar sind diese Gleichungen Differentialgleichungen erster Ordnung für jene Bahnen.

Denn wäre R eine ganz beliebige Funktion der p_ϱ, so stellten die Gleichungen **212 b** die senkrechten Trajektorien der Schar **a)** vor, und es wäre nach **213** der senkrechte Abstand zweier Nachbarflächen gleich $f\,dR$. Nach unserer besonderen Voraussetzung ist aber dieser Abstand konstant und gleich dR, also ist $f = 1$, und es gehen daher die Gleichungen **212 b** in die obigen Gleichungen **b)** über.

231 **Folgerung 3.** Stellt die Gleichung

$$R = \text{constans}$$

eine Schar von Flächen dar von solcher Beschaffenheit, dafs jede unter ihnen von ihren Nachbarn in allen Lagen den gleichen senkrechten geradesten Abstand dR hat, so genügt die Funktion R der partiellen Differentialgleichung:

$$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma} \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \frac{\partial R}{\partial p_\sigma} = 1 \quad .$$

Denn diese Gleichung folgt aus **214** und **230**; sie wird auch unmittelbar erhalten, wenn wir die Richtungscosinus einer geradesten Bahn nach **230 b** einsetzen in die Gleichung **88**, welcher die Winkel einer jeden Richtung mit den Koordinaten genügen.

232 **Lehrsatz 1.** **(Umkehrung von 231.)** Genügt die Funktion R der partiellen Differentialgleichung:

$$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma} \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \frac{\partial R}{\partial p_\sigma} = 1 \quad ,$$

so stellt die Gleichung

$$R = \text{constans}$$

eine Schar von Flächen dar von solcher Beschaffenheit, dafs

jede unter ihnen von ihren Nachbarn in allen Lagen gleichen senkrechten geradesten Abstand hat, und zwar einen Abstand, welcher durch die Änderung von R gemessen wird.

Denn wäre R eine ganz beliebige Funktion, so wären die senkrechten Trajektorien der Schar gegeben durch Gleichungen der Form **212b**, und der senkrechte Abstand zweier Nachbarflächen in jeder Lage wäre $f dR$. Aus der besonderen Voraussetzung, welcher wir die Funktion R unterwarfen, folgt aber nach **214**: $f = 1$, und also die Behauptung.

Lehrsatz 2. Ist die Funktion R der p_ϱ eine beliebige **233**
Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \, b_{\varrho\sigma} \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \frac{\partial R}{\partial p_\sigma} = 1 \quad , \qquad \text{a)}$$

so sind die Gleichungen

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}} \cos s, p_\varrho = \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \qquad \text{b)}$$

Gleichungen geradester Bahnen. Und zwar sind es Differentialgleichungen erster Ordnung der durch sie dargestellten geradesten Bahnen.

Der Satz folgt unmittelbar aus **230** und **232**.

Anmerkung. Obwohl jede Bahn, welche durch die Gleich- **234**
ungen **233b** dargestellt wird, eine geradeste ist, so läſst sich doch nicht umgekehrt allgemein jede geradeste Bahn in dieser Form darstellen. Die Mannigfaltigkeit der geradesten Bahnen, welche in der gegebenen Form enthalten sind, hängt vielmehr ab von der Mannigfaltigkeit, welche die Funktion R als Lösung der Differentialgleichung besitzt, d. h. von der Zahl ihrer willkürlichen Konstanten.

Ist aber im besondern R eine vollständige Lösung, enthält also R r willkürliche Konstanten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots . \alpha_{r-1}$, von welchen die erste die notwendig vorhandene additive Konstante bezeichne, so lassen sich alle geradesten Bahnen des Systems in der Form **233b** darstellen. Denn die rechten Seiten dieser r Gleichungen (von welchen nur $r-1$ unabhängig von einander

sind) enthalten dann $r-1$ Konstanten, welche hinreichen, um der dargestellten Bahn in einer willkürlichen Lage eine durch $r-1$ unabhängige Richtungscosinus bestimmte willkürliche Richtung zu erteilen. Können wir aber eine Lage der dargestellten Bahn und ihre Richtung in dieser Lage willkürlich wählen, so können wir alle geradesten Bahnen darstellen.

235 **Lehrsatz 3.** (Jacobi's Satz.) Es bezeichne R eine vollständige Lösung der Differentialgleichung

a) $$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \, b_{\varrho\sigma} \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \frac{\partial R}{\partial p_\sigma} = 1 \quad ,$$

und es seien ihre willkürlichen Konstanten, von der additiven abgesehen, α_1, α_2, ... α_{r-1}. Es geben alsdann die $r-1$ Gleichungen

b) $$\frac{\partial R}{\partial \alpha_\tau} = \beta_\tau \quad ,$$

in welchen die β_τ $r-1$ neue willkürliche Konstanten sind, die Gleichungen der geradesten Bahnen des Systems in endlicher Form.

Zum Beweise zeigen wir, dafs die Bahnen, welche durch die Gleichungen **b)** dargestellt werden, senkrechte Trajektorien der Schar

c) $$R = \text{constans}$$

sind; alsdann folgt die Behauptung nach **232** und **229**.

Um nun erstens die Richtung der dargestellten Bahn zu finden, differentiieren wir die Gleichungen **b)** in Richtung derselben, d. h. wir bilden jene Gleichungen für zwei um ds entfernte Lagen der Bahn, in welchen sich die p_ϱ um die dp_ϱ unterscheiden, subtrahieren, und dividieren durch ds. Wir erhalten so $r-1$ Gleichungen der Form:

$$\sum_1^r{}_\sigma \frac{\partial^2 R}{\partial p_\sigma \partial \alpha_\tau} \frac{dp_\sigma}{ds} = 0 \quad ,$$

oder, wenn wir in dieselben nach **79** und **78** die Richtungs- **(235)**
cosinus des betrachteten Bahnelementes einführen:

$$\sum_1^r {}_\varrho \sqrt{a_{\varrho\varrho}} \cos s,p_\varrho \sum_1^r {}_\sigma\, b_{\varrho\sigma} \frac{\partial^2 R}{\partial p_\sigma \partial \alpha_\tau} = 0 \quad , \qquad \mathbf{d)}$$

welche Gleichungen nunmehr $r-1$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $r-1$ Verhältnisse der Richtungscosinus unter einander bilden.

Zweitens bemerken wir, dafs die Gleichung **a)** für alle Werte der Konstanten α_τ gilt; wir können sie also nach diesen Gröfsen differentiieren, und indem wir dies thun, erhalten wir $r-1$ Gleichungen, welche sich schreiben lassen in der Form:

$$\sum_1^r {}_\varrho \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \sum_1^r {}_\sigma\, b_{\varrho\sigma} \frac{\partial^2 R}{\partial p_\sigma \partial \alpha_\tau} = 0 \quad , \qquad \mathbf{e)}$$

und welche Beziehungen darstellen, welchen die partiellen Differentialquotienten von R zufolge unserer besonderen Voraussetzungen über diese Funktion genügen müssen.

Stellen nun die Gleichungen **b)** für die gerade betrachteten Werte der α_τ und β_τ überhaupt eine bestimmte Bahn vor, so müssen aus den Gleichungen **d)** eindeutig bestimmte Werte für die Verhältnisse der Richtungscosinus zu einem unter ihnen folgen. Ganz dieselben eindeutig bestimmten Werte müssen dann aber auch aus den Gleichungen **e)** für die Verhältnisse der Gröfsen $\partial R / \partial p_\varrho$ zu einer unter ihnen sich ergeben. Ist also f ein noch zu bestimmender Faktor, so mufs sein:

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}} \cos s,p_\varrho = f \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \quad .$$

Demnach ist nach **212** die betrachtete Bahn die senkrechte Trajektorie der Schar **c)**, was wir beweisen wollten. Der Faktor f wird gleich der Einheit gefunden.

Die Voraussetzung, dafs die $r-1$ Gleichungen **b)** für bestimmte Werte der α_τ und β_τ eine bestimmte Bahn be-

zeichnen, würde nur dann nicht zutreffen, wenn diese Gleichungen nicht unabhängig von einander wären. Dann aber wären auch die willkürlichen Konstanten nicht von einander unabhängig und die Lösung wäre keine vollständige Lösung, was wir doch voraussetzten.

236 **Aufgabe.** Aus einer beliebigen vollständigen Lösung R der Differentialgleichung **235a** die geradeste Entfernung S des Systems zu ermitteln.

Unter S ist also wieder zu verstehen die geradeste Entfernung zweier Lagen 0 und 1 mit den Koordinaten p_{ϱ_0} und p_{ϱ_1}. In den $r-1$ Gleichungen **235b** setzen wir für die p_ϱ das eine Mal die p_{ϱ_0}, das andere Mal die p_{ϱ_1}. Aus den entstehenden $2r-2$ Gleichungen eliminieren wir die β_τ und stellen die α_τ als Funktionen der p_{ϱ_0} und p_{ϱ_1} dar. Diese Funktionen werden symmetrisch in Bezug auf p_{ϱ_0} und p_{ϱ_1}, sie geben diejenigen Werte, welche die α_τ haben müssen, damit die durch sie bezeichneten Bahnen durch bestimmte Lagen 0 und 1 hindurchgehen.

Wir haben nun erstens für irgend eine Lage 1 nach **224a** und **233b**:

$$\frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_1}} = \left(\frac{\partial R}{\partial p_\varrho}\right)_1$$

und zweitens für irgend eine Lage 0 nach **226a** und **233b**:

$$\frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_0}} = -\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varrho}\right)_0 \quad .$$

Setzen wir in den rechten Seiten dieser Gleichungen für die α_τ ihre Werte in den p_{ϱ_0} und p_{ϱ_1} ein, und die p_ϱ selbst in der ersten gleich p_{ϱ_1}, in der zweiten gleich p_{ϱ_0}, so erhalten wir die ersten Differentialquotienten von S nach den sämtlichen unabhängigen Variabelen ausgedrückt als Funktionen dieser Variabelen. S kann also dann durch einfache Integrationen gefunden werden.

Abschnitt 7. Kinematische Begriffe.

I. Vektorgröfsen in Bezug auf ein System.

Definition. Vektorgröfse in Bezug auf ein System heifst jede Gröfse, welche zu dem System in Beziehung steht, und welche dieselbe Art der mathematischen Mannigfaltigkeit hat, wie eine denkbare Verrückung des Systems. 237

Bemerkungen dazu.

1. Eine Verrückung eines Systems ist selbst eine Vektorgröfse in Bezug auf das System. Jedes Produkt einer Verrückung des Systems mit irgend welchen nicht gerichteten Gröfsen ist eine Vektorgröfse in Bezug auf das System. 238

2. Jede Vektorgröfse in Bezug auf ein System kann geometrisch dargestellt werden durch eine denkbare Verrückung des Systems. Die Richtung der sie darstellenden Verrückung nennen wir auch die Richtung der Vektorgröfse. Der Mafsstab der Darstellung kann und soll stets so gewählt werden, dafs die darstellende Verrückung unendlich klein wird. Jeder Vektor in Bezug auf ein System, welcher sich mit der Lage des Systems ändert, kann alsdann dargestellt werden als eine unendlich kleine Verrückung des Systems aus der Lage, zu welcher sein augenblicklicher Wert gehört. 239

3. Eine Vektorgröfse in Bezug auf einen einzelnen materiellen Punkt ist ein Vektor im gewöhnlichen Sinne des Wortes. Jeder Vektor in Bezug auf einen Punkt kann dargestellt werden durch eine geometrische Verrückung des Punktes, insbesondere durch eine unendlich kleine Verrückung aus seiner gegenwärtigen Lage. 240

4. Unter Komponenten und reduzierten Komponenten eines Vektors sind diejenigen Vektoren gleicher Art verstanden, welche dargestellt sind durch die Komponenten und reduzierten 241

Komponenten derjenigen unendlich kleinen Verrückung, welche den ursprünglichen Vektor darstellt (48, 71).

Die reduzierte Komponente eines bestimmten Vektors in Richtung einer Koordinate p_ϱ nennen wir wiederum kurz die Komponente des Vektors nach p_ϱ, oder noch kürzer den Vektor nach der Koordinate p_ϱ.

Wo es ohne Mifsverständnifs geschehen kann, wird mit Komponente oder reduzierte Komponente kurz die Gröfse dieser Komponenten bezeichnet.

242 **Aufgabe 1a.** Aus den Komponenten h_ν eines Vektors nach den $3n$ rechtwinkligen Koordinaten die Komponenten k_ϱ nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ abzuleiten.

Sind die $d\bar{x}_\nu$ die Komponenten nach den x_ν derjenigen Verrückung, welche die Vektorgröfse darstellt, und sind die $d\bar{p}_\varrho$ die Komponenten derselben Verrückung nach den p_ϱ, so sind nach 80 die $d\bar{p}_\varrho$ durch die $d\bar{x}_\nu$ gegeben. Den $d\bar{p}_\varrho$ und $d\bar{x}_\nu$ aber sind die k_ϱ und h_ν beziehlich proportional, also ist

$$k_\varrho = \sum_1^{3n}{}_\nu\, \alpha_{\nu\varrho} h_\nu = \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial p_\varrho} h_\nu \quad .$$

243 **Aufgabe 1b.** Aus den Komponenten k_ϱ eines Vektors nach den p_ϱ die Komponenten h_ν des Vektors nach den rechtwinkligen Koordinaten abzuleiten.

Die Gleichungen 242 geben nur r Gleichungen für die $3n$ Gröfsen h_ν, aus welchen sich diese letzteren also nicht bestimmen lassen. In der That ist auch die Aufgabe im allgemeinen unbestimmt. Denn nicht alle denkbaren Lagen und Verrückungen eines Systems lassen sich durch die p_ϱ ausdrücken, sondern nur ein Teil derselben, unter diesen die möglichen Verrückungen.

Nur in dem Falle also, dafs der gegebene Vektor einer Verrückung parallel ist, welche sich durch die p_ϱ und ihre Änderungen darstellen läfst, ist die Aufgabe lösbar; in diesem Falle aber ist nach 81

$$h_\nu = \sum_1^{r}{}_\varrho\, \beta_{\nu\varrho} k_\varrho \quad .$$

Aufgabe 2a. Aus den Komponenten h_ν eines Vektors nach den rechtwinkligen Koordinaten seine Gröfse h zu bestimmen. 244

Unter Benutzung von **83** erhält man:

$$h^2 = \sum_1^{3n} {}_\nu \frac{m}{m_\nu} h_\nu^2 \quad .$$

Aufgabe 2b. Aus den Komponenten k_ϱ eines Vektors nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ seine Gröfse k zu bestimmen. 245

Die Aufgabe ist wiederum im allgemeinen unbestimmt wie **243**.

Nur in dem Falle, dafs aufser den Komponenten k_ϱ noch die Thatsache bekannt gegeben ist, dafs der fragliche Vektor einer durch die p_ϱ ausdrückbaren Verrückung parallel ist, ist k durch die k_ϱ bestimmt, und in diesem Falle ist nach **82**

$$k^2 = \sum_1^r {}_\varrho \sum_1^r {}_\sigma \, b_{\varrho\sigma} k_\varrho k_\sigma \quad .$$

Aufgabe 3a. Aus den Komponenten h_ν eines Vektors nach den x_ν die Komponente des Vektors in Richtung einer beliebigen Verrückung ds zu finden. 246

Ist ds' die Länge, und sind die $d\bar{x}'_\nu$ die reduzierten Komponenten der Verrückung, durch welche wir den Vektor darstellen, so ist die Komponente dieser Verrückung in Richtung von ds nach **48** und **84**:

$$ds' \cos s,s' = \frac{1}{ds} \sum_1^{3n} {}_\nu \, dx_\nu \, d\bar{x}'_\nu \quad .$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit dem Verhältnis zwischen der Gröfse des Vektors und der Länge der Verrückung, durch welche wir ihn darstellen, so erhalten wir links die gesuchte Komponente; rechts treten an Stelle der $d\bar{x}'_\nu$ die h_ν, und wir erhalten also als Lösung der Aufgabe die gesuchte Gröfse gleich:

$$\sum_{1}^{3n}{}_{\nu}\, h_\nu \frac{dx_\nu}{ds}$$

oder nach **72** gleich:

$$\sum_{1}^{3n}{}_{\nu} \sqrt{\frac{m}{m_\nu}}\, h_\nu \cos s,x_\nu \quad .$$

247 **Aufgabe 3b.** Aus den Komponenten k_ϱ eines Vektors nach den p_ϱ die Komponente des Vektors in der Richtung einer beliebigen durch die p_ϱ ausdrückbaren Verrückung ds zu bestimmen.

Wenden wir dieselbe Überlegung an, wie in der vorigen Aufgabe, so folgt nach **48** und **85** die gesuchte Gröſse gleich:

$$\sum_{1}^{r}{}_{\varrho}\, k_\varrho \frac{dp_\varrho}{ds}$$

oder nach **78** und **79** gleich:

$$\sum_{1}^{r}{}_{\varrho} \sum_{1}^{r}{}_{\sigma}\, b_{\varrho\sigma} k_\varrho \sqrt{a_{\sigma\sigma}} \cos s,p_\sigma \quad .$$

248 **Anmerkung.** Obwohl also durch die Gröſsen k_ϱ im allgemeinen nicht alle beliebigen Komponenten eines Vektors bestimmt sind, so sind doch durch jene Gröſsen die Komponenten des Vektors in allen solchen Richtungen bestimmt, welche sich durch die p_ϱ darstellen lassen, also in jeder möglichen Richtung.

249 **Lehrsatz 1.** Damit der Vektor, dessen Komponenten nach den p_ϱ die Gröſsen k_ϱ sind, senkrecht stehe auf einer Verrückung, für welche die p_ϱ die Änderungen dp_ϱ erleiden, ist notwendige und hinreichende Bedingung die Erfüllung der Gleichung:

$$\sum_{1}^{r}{}_{\varrho}\, k_\varrho\, dp_\varrho = 0 \quad .$$

Dies folgt aus **85**, wenn wir die k_ϱ den $d\bar{p}'_\varrho$ proportional annehmen.

Lehrsatz 2. Damit der Vektor, dessen Komponenten nach den p_ϱ die k_ϱ sind, senkrecht stehe auf jeder möglichen Verrückung des Systems, ist notwendige und hinreichende Bedingung, dafs sich die r Gröfsen k_ϱ darstellen lassen in der Form: 250

$$k_\varrho = \sum_1^k {}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, \gamma_\varkappa \quad ,$$

in welcher die $p_{\varkappa\varrho}$ den Bedingungsgleichungen des Systems entnommen (**130**) und die $\gamma_\varkappa$ k frei zu bestimmende Gröfsen sind.

Dies folgt aus **148** und **150**, wenn wir die k_ϱ durch die $d\bar{p}_\varrho$ dargestellt annehmen.

Bemerkung 1. Vektoren in Bezug auf ein und dasselbe System können zusammengesetzt und zerlegt werden wie die denkbaren Verrückungen des Systems. 251

Die Zusammensetzung von Vektoren in Bezug auf dasselbe System erfolgt also nach den Regeln der algebraischen Addition.

Bemerkung 2. Vektoren in Bezug auf verschiedene Systeme sind zu betrachten als Gröfsen verschiedener Art; sie können nicht zusammengesetzt, noch addiert werden. 252

Bemerkung 3. Eine Vektorgrösse in Bezug auf ein gewisses System kann betrachtet werden als eine Vektorgröfse in Bezug auf jedes gröfsere System, von welchem das ursprüngliche einen Teil bildet. 253

Aufgabe 1. Dieselbe Vektorgröfse werde einmal betrachtet als Vektorgröfse in Bezug auf ein Teilsystem, das andere Mal als Vektorgröfse in Bezug auf das vollständige System. Aus den Komponenten h_ν nach den rechtwinkligen Koordinaten x_ν im ersten Falle sollen die Komponenten h'_ν nach den entsprechenden Koordinaten x'_ν im zweiten Falle berechnet werden. 254

Es sei die Masse des Teilsystems m, die des vollständigen Systems m'. Die Koordinaten x_ν des Teilsystems sind zugleich Koordinaten des vollständigen Systems, nur um der verschiedenen Auffassung willen sind sie als solche mit x'_ν bezeichnet. Erteilen wir daher dem Teilsystem eine beliebige

Verrückung, welche eo ipso zugleich eine Verrückung des vollständigen Systems ist, so ist $dx'_\nu = dx_\nu$ für die gemeinsamen Koordinaten, während für die übrigen $dx'_\nu = 0$ ist. Nun ist nach 73: $m' d\bar{x}'_\nu = m_\nu dx'_\nu$ und $m d\bar{x}_\nu = m_\nu dx_\nu$, also ist $m' d\bar{x}'_\nu = m d\bar{x}_\nu$. Für einen Vektor, welcher durch jene Verrückung dargestellt wird, ist die Komponente nach x_ν mit $d\bar{x}_\nu$, die nach x'_ν mit $d\bar{x}'_\nu$ proportional. Als Lösung der Aufgabe erhalten wir also:

$$m' h'_\nu = m h_\nu$$

für diejenigen ν, welche beiden Systemen gemeinsam sind, während für die übrigen

$$h'_\nu = 0 \qquad \text{ist.}$$

255 **Aufgabe 2.** Dieselbe Vektorgröſse werde einmal betrachtet als Vektorgröſse in Bezug auf ein Teilsystem, das andere Mal als Vektorgröſse in Bezug auf das vollständige System. Aus den Komponenten k_ϱ nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ im ersten Falle die Komponenten k'_ϱ nach den entsprechenden Koordinaten p'_ϱ im zweiten zu bestimmen.

Es sei wieder die Masse des Teilsystems m, die des vollständigen Systems m'. Wir setzen voraus, daſs die Koordinaten p_ϱ des Teilsystems zugleich Koordinaten des vollständigen Systems sind und nur um der verschiedenen Auffassung willen im letzteren Falle mit p'_ϱ bezeichnet werden. Von den nicht gemeinsamen p'_ϱ setzen wir voraus, daſs sie nicht Koordinaten des Teilsystems seien. Unter diesen Voraussetzungen ergiebt eine der vorigen (254) analoge Betrachtung als Lösung der Aufgabe:

$$m' k'_\varrho = m k_\varrho$$

für die gemeinsamen Koordinaten, während für die übrigen

$$k'_\varrho = 0 \qquad \text{ist.}$$

Ohne die gemachten Voraussetzungen aber ist die Aufgabe unbestimmt.

2. Bewegung der Systeme.

Erläuterungen.

1. Der Übergang eines Systems materieller Punkte aus einer Anfangslage in eine Endlage, betrachtet unter Berücksichtigung der Zeit und der Art des Überganges, heifst eine Bewegung des Systems aus der Anfangs- in die Endlage (vgl. 27). 256

Bei einer jeden bestimmten Bewegung durchläuft also das System eine bestimmte Bahn, und zwar hat es in bestimmten Zeiten bestimmte Längen derselben durchlaufen.

2. Jede Bewegung eines Systems durch eine denkbare Bahn heifst eine denkbare Bewegung des Systems (11). 257

3. Jede Bewegung eines Systems durch eine mögliche Bahn heifst eine mögliche Bewegung des Systems (112). 258

4. Die Kinematik oder reine Bewegungslehre handelt von den denkbaren und den möglichen Bewegungen der Systeme. 259

Solange es sich um die Betrachtung gesetzmäfsiger Systeme (119, 120) handelt, fallen die Betrachtungen der Kinematik mit denen der Geometrie fast zusammen. Erst wenn es sich um ungesetzmäfsige Systeme handelt und also die Zeit in die Bedingungsgleichungen der Systeme eintritt, gewinnt die Kinematik vor der Geometrie gröfsere Mannigfaltigkeit. Wir haben indessen nicht nötig, auf eigentlich kinematische Betrachtungen einzugehen, sondern dürfen uns hier mit der Erörterung einer Anzahl von Grundbegriffen begnügen.

Analytische Darstellung. Die Bewegung eines Systems wird analytisch dargestellt, indem bei Darstellung der beschriebenen Bahn die Zeit t als unabhängige Variabele benutzt wird, oder, was dasselbe ist, indem die Koordinaten der Lage des Systems als Funktionen der Zeit angegeben werden. 260

Die Differentialquotienten aller Gröfsen nach der Zeit bezeichnen wir nach Newton's Weise durch übergesetzte Punkte.

Geschwindigkeit.

261 **Definition 1.** Die augenblickliche Bewegungsart eines Systems heifst die Geschwindigkeit des Systems.

Die Geschwindigkeit ist bestimmt durch die Änderung, welche die Lage des Systems in einer unendlich kleinen Zeit erleidet und durch diese Zeit selbst. Sie wird gemessen durch das von dem absoluten Werte beider unabhängige Verhältnis dieser Gröfsen.

Lage und Geschwindigkeit eines Systems zusammen nennen wir den Zustand des Systems.

262 **Folgerung.** Die Geschwindigkeit eines Systems kann betrachtet werden als Vektorgröfse in Bezug auf das System. Die Richtung der Geschwindigkeit ist alsdann die Richtung des augenblicklichen Bahnelements, die Gröfse der Geschwindigkeit ist gleich dem Differentialquotienten der zurückgelegten Bahnstrecke nach der Zeit.

Die Gröfse der Geschwindigkeit heifst auch die Geschwindigkeit des Systems in seiner Bahn, oder, wo Mifsverständnisse ausgeschlossen sind, die Geschwindigkeit schlechthin.

263 **Definition 2.** Eine Bewegung eines Systems, bei welcher die Geschwindigkeit ihre Gröfse nicht ändert, heifst eine gleichförmige Bewegung.

264 **Anmerkung.** Gerade Bewegung eines Systems ist eine Bewegung in gerader Bahn. Bei einer solchen Bewegung ändert die Geschwindigkeit ihre Richtung nicht.

265 **Aufgabe 1.** Die Gröfse der Geschwindigkeit, ihre Komponenten und ihre reduzierten Komponenten in Richtung der rechtwinkligen Koordinaten auszudrücken durch die Änderungsgeschwindigkeiten dieser Koordinaten.

Die Gröfse v der Geschwindigkeit ist gegeben durch die positive Wurzel der Gleichung:

$$m v^2 = m \frac{ds^2}{dt^2} = \sum_1^{3n} {}_\nu\, m_\nu \dot{x}_\nu^2 \quad .$$

Darnach (241) sind die Komponenten der Geschwindigkeit in Richtung der x_ν gleich

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\,\dot{x}_\nu \quad ,$$

und die reduzierten Komponenten in der gleichen Richtung, oder die Komponenten nach den x_ν gleich:

$$\frac{m_\nu}{m}\,\dot{x}_\nu \quad .$$

Anmerkung. Die Gröſse der Geschwindigkeit eines Systems 266
ist der quadratische Mittelwert aus der Gröſse der Geschwindigkeiten aller seiner Massenteilchen.

Aufgabe 2. Die Gröſse der Geschwindigkeit, ihre Kom- 267
ponenten und ihre reduzierten Komponenten in Richtung der allgemeinen Koordinaten p_ϱ auszudrücken durch die Änderungsgeschwindigkeiten $\dot{p}_\varrho$ dieser Koordinaten.

Durch Transformation von 265 nach 57 erhalten wir die Gröſse der Geschwindigkeit als positive Wurzel der Gleichung:

$$v^2 = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\,\dot{p}_\varrho\,\dot{p}_\sigma \quad .$$

Darnach sind (241) die Komponenten in der Richtung der p_ϱ gleich

$$\frac{1}{\sqrt{a_{\varrho\varrho}}} \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\,\dot{p}_\sigma \quad ,$$

und die reduzierten Komponenten in derselben Richtung, oder die Komponenten nach den p_ϱ gleich:

$$\sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\,\dot{p}_\sigma \quad .$$

Moment.

268 **Definition.** Das Produkt aus der Masse eines Systems in seine Geschwindigkeit heifst die Bewegungsgröfse oder das Moment des Systems.

Das Moment eines Systems ist also eine Vektorgröfse in Bezug auf das System. Die Komponenten des Moments nach irgendwelchen Koordinaten werden gewöhnlich schlechthin die Momente des Systems nach diesen Koordinaten genannt (241).

269 **Bezeichnung.** Die Momente eines Systems nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ sollen dauernd mit q_ϱ bezeichnet werden.

270 **Aufgabe 1.** Die Momente q_ϱ eines Systems nach den p_ϱ auszudrücken durch die Änderungsgeschwindigkeiten dieser Koordinaten.

Aus 268 und 267 erhalten wir:

$$q_\varrho = m \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma} \dot{p}_\sigma \quad .$$

271 **Aufgabe 2.** Die Änderungsgeschwindigkeiten der allgemeinen Koordinaten p_ϱ auszudrücken durch die Momente des Systems nach diesen Koordinaten.

Durch Auflösung der vorigen Gleichungen erhalten wir:

$$\dot{p}_\varrho = \frac{1}{m} \sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma} q_\sigma \quad .$$

272 **Anmerkung.** Die Geschwindigkeit und die Bewegungsgröfse eines Systems sind solche Vektoren in Bezug auf das System, welche stets möglichen Verrückungen des Systems parallel sind (vergl. 243, 245).

Beschleunigung.

273 **Definition.** Die augenblickliche Veränderungsweise der Geschwindigkeit eines Systems heifst die Beschleunigung des Systems.

Die Beschleunigung ist bestimmt durch die Änderung, welche die Geschwindigkeit in unendlich kurzer Zeit erleidet und diese Zeit selbst; sie wird gemessen durch das von dem absoluten Werte beider unabhängige Verhältnis dieser Gröfsen.

Folgerung. Die Beschleunigung eines Systems kann be- 274
trachtet werden als Vektorgröfse in Bezug auf das System. Bilden wir von der gegenwärtigen Lage des Systems aus zwei Verrückungen, von welchen die eine die gegenwärtige Geschwindigkeit darstellt, die andere die Geschwindigkeit im nächsten Augenblick, so giebt die Differenz derselben eine neue Verrückung, deren Richtung die Richtung der Beschleunigung ist, während die Gröfse der Beschleunigung gleich ist dem Verhältnis der Länge jener neuen Verrückung zum Differentiale der Zeit.

Aufgabe 1. Die Gröfse f der Beschleunigung und ihre 275
Komponenten nach den rechtwinkligen Koordinaten auszudrücken durch die Differentialquotienten dieser Koordinaten nach der Zeit.

Die Komponenten der Geschwindigkeit nach den x_ν, jetzt und nach der Zeit dt, sind (265):

$$\frac{m_\nu}{m}\dot{x}_\nu \quad \text{und} \quad \frac{m_\nu}{m}\dot{x}_\nu + \frac{m_\nu}{m}\ddot{x}_\nu\, dt \quad ,$$

die Komponenten der Differenz beider also $\frac{m_\nu}{m}\ddot{x}_\nu\, dt$; das Verhältnis dieser zur Zeit dt giebt die Komponenten der Beschleunigung nach den x_ν gleich:

$$\frac{m_\nu}{m}\ddot{x}_\nu \quad ,$$

woraus die Gröfse der Beschleunigung folgt als positive Wurzel der Gleichung (244):

$$mf^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu\, \ddot{x}_\nu^2 \quad .$$

276 **Anmerkung.** Die Gröfse der Beschleunigung eines materiellen Systems ist der quadratische Mittelwert aus der Gröfse der Beschleunigungen seiner Massenteilchen.

277 **Aufgabe 2.** Die Komponenten f_ϱ der Beschleunigung eines Systems nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ darzustellen durch die Differentialquotienten dieser Koordinaten nach der Zeit.

Nach **242** haben wir

$$f_\varrho = \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m} \alpha_{\nu\varrho} \ddot{x}_\nu \quad ,$$

und hierin ist einzusetzen, wie in **108**:

$$\ddot{x}_\nu = \sum_1^r{}_\sigma \alpha_{\nu\sigma} \ddot{p}_\sigma + \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \quad .$$

Indem wir dieselbe Umformung benutzen wie in **108**, erhalten wir als Lösung der Aufgabe:

$$f_\varrho = \sum_1^r{}_\sigma a_{\varrho\sigma} \ddot{p}_\sigma + \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} \right) \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \quad .$$

278 **Anmerkung 1.** Die Komponenten der Beschleunigung sind also im allgemeinen lineare Funktionen der zweiten Differentialquotienten der Koordinaten, quadratische Funktionen der ersten Differentialquotienten derselben, beliebig verwickelte Funktionen der Koordinaten selbst.

279 **Anmerkung 2.** Die Beschleunigung eines Systems ist nicht notwendig einer möglichen Verrückung des Systems parallel, noch auch einer Verrückung, welche sich durch die benutzten Koordinaten p_ϱ ausdrücken läfst.

Die Komponenten f_ϱ reichen daher im allgemeinen nicht aus, um die Gröfse der Beschleunigung, noch auch um ihre Komponenten nach sämtlichen rechtwinkligen Koordinaten zu bestimmen (**243, 245**). Dagegen reichen die f_ϱ aus, um die Komponente der Beschleunigung in der Richtung einer jeden möglichen Bewegung des Systems zu bestimmen (**248**).

Aufgabe 3. Die Komponente der Beschleunigung in der Richtung der Bahn zu finden. 280

Die Richtungscosinus der Bahn sind nach 72 gleich $\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\frac{dx_\nu}{ds}$, also unter Berücksichtigung von 265 gleich $\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\frac{\dot{x}_\nu}{v}$. Hieraus folgt nach 246 unter Benutzung von 275 für die gesuchte tangentiale Komponente f_t:

$$f_t = \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m}\frac{\dot{x}_\nu \ddot{x}_\nu}{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s} \quad ,$$

unter s die laufende Länge der Bahn verstanden.

Bemerkung. Zerlegen wir die Beschleunigung eines Systems 281
in zwei Komponenten, von denen die eine die Richtung der Bahn hat, die andere auf der Bahn senkrecht steht, so ist die Gröſse der letzteren gleich dem Produkt aus der Krümmung der Bahn in das Quadrat der Geschwindigkeit des Systems in der Bahn.

Indem wir in Gleichung 107c die Zeit t als unabhängige Variabele nehmen, erhalten wir:

$$m\,v^4 c^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \ddot{x}_\nu^2 - m\,\ddot{s}^2 \quad ,$$

also unter Benutzung von 275 und 280:

$$v^4 c^2 = f^2 - f_t^2 \quad .$$

Nennen wir nun die zweite, radiale oder centrifugale Komponente der Beschleunigung f_r, so ist, da f_r und f_t senkrecht zu einander sein sollen: $f^2 = f_r^2 + f_t^2$, also:

$$f_r = c\,v^2 \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Energie.

282 **Definition.** Das halbe Produkt aus der Masse eines Systems in das Quadrat der Gröfse seiner Geschwindigkeit heifst die Energie des Systems.

283 **Aufgabe 1.** Die Energie E eines Systems darzustellen durch die Änderungsgeschwindigkeiten seiner rechtwinkligen Koordinaten.

Es ist nach **265**:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \dot{x}_\nu^2 \quad .$$

284 **Folgerung 1.** Die Energie eines Systems ist die Summe der Energieen seiner Massenteilchen.

285 **Folgerung 2.** Bilden mehrere Systeme zusammen ein gröfseres System, so ist die Energie des letzteren die Summe der Energieen der ersteren.

286 **Aufgabe 2.** Die Energie eines Systems darzustellen durch die Änderungsgeschwindigkeiten der allgemeinen Koordinaten des Systems und durch die Momente nach diesen Koordinaten.

Unter Benutzung von **267**, **270** und **271** folgt nach einander:

a) $$E = \frac{1}{2} m \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma} \dot{p}_\varrho \dot{p}_\sigma$$

b) $$= \frac{1}{2} \sum_1^r{}_\varrho\, q_\varrho \dot{p}_\varrho$$

c) $$= \frac{1}{2m} \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma} q_\varrho q_\sigma \quad .$$

287 **Anmerkung** (zu **261** bis **286**). Die Geschwindigkeit, das Moment, die Beschleunigung, die Energie eines Systems sind definiert unabhängig von der analytischen Darstellung, insbesondere also auch unabhängig von der Wahl der Koordinaten des Systems.

Benutzung partieller Differentialquotienten.

Bezeichnung. (Vergl. 90). Mit $\partial_p E$ soll bezeichnet werden das partielle Differential der Energie E dann und nur dann, wenn wir die Koordinaten p_ϱ und deren Änderungsgeschwindigkeiten $\dot{p}_\varrho$ als die unabhängig von einander veränderlichen Bestimmungsstücke der Energie betrachten (**286a**). 288

Mit $\partial_q E$ dagegen soll bezeichnet werden das partielle Differential der Energie E dann und nur dann, wenn wir die Koordinaten p_ϱ und die Momente q_ϱ nach diesen Koordinaten als die unabhängig von einander veränderlichen Bestimmungsstücke der Energie betrachten (**286c**).

Eine jede der beiden Annahmen schliefst die andere aus. Mit ∂E werde, wie gewöhnlich, bezeichnet irgend eine Art des partiellen Differentials von E, also die erste Art oder die zweite, wo ein Mifsverständnis ausgeschlossen ist, oder auch irgend eine dritte Art.

Bemerkung 1. Die Momente q_ϱ eines Systems nach den Koordinaten p_ϱ lassen sich darstellen als partielle Differentialquotienten der Energie des Systems nach den Änderungsgeschwindigkeiten der Koordinaten. 289

Denn es ist nach Gleichung **286a** und **270**: (vergl. **91**)

$$q_\varrho = \frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho} \quad .$$

Bemerkung 2. Die Änderungsgeschwindigkeiten $\dot{p}_\varrho$ der Koordinaten p_ϱ eines Systems lassen sich darstellen als partielle Differentialquotienten der Energie des Systems nach den Momenten. 290

Denn es ist nach Gleichung **286c** und **271**: (vergl. **94**)

$$\dot{p}_\varrho = \frac{\partial_q E}{\partial q_\varrho} \quad .$$

Bemerkung 3. Die Komponenten f_ϱ der Beschleunigung eines Systems nach den Koordinaten p_ϱ lassen sich darstellen durch partielle Differentialquotienten der Energie. 291

Denn nach Gleichung **286a** ist erstens:

$$\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho} = m \sum_1^r {}_\sigma\, a_{\varrho\sigma} \dot{p}_\sigma \quad ,$$

also:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right) = m \sum_1^r {}_\sigma\, a_{\varrho\sigma} \ddot{p}_\sigma + m \sum_1^r {}_\sigma \sum_1^r {}_\tau \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \quad ,$$

und nach derselben Gleichung zweitens:

$$\frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} = \frac{1}{2} m \sum_1^r {}_\sigma \sum_1^r {}_\tau \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \quad .$$

Durch Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten und Vergleichung mit **277** folgt:

a) $$m f_\varrho = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right) - \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} \quad ,$$

wofür auch geschrieben werden kann unter Berücksichtigung von **289**:

b) $$m f_\varrho = \dot{q}_\varrho - \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} \quad .$$

292 **Bemerkung 4.** Ändern wir eine Koordinate p_τ eines Systems zweimal um denselben unendlich kleinen Betrag, indem wir das eine Mal den Änderungsgeschwindigkeiten der Koordinaten, das andere Mal den Momenten nach den Koordinaten ihre ursprünglichen Werte lassen, so erleidet die Energie des Systems in beiden Fällen entgegengesetzt gleiche Änderung.

Denn multipliziert man die Gleichung **95a** mit mds und dividiert durch dt^2, so liefert sie:

$$\frac{\partial_p E}{\partial p_\tau} = - \frac{\partial_q E}{\partial p_\tau} \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Lehrsatz. Erleidet die Lage eines Systems zweimal dieselbe unendlich kleine Änderung, während das eine Mal die Änderungsgeschwindigkeiten der Koordinaten, das andere Mal die Momente nach den Koordinaten ihre ursprünglichen Werte behalten, so erleidet die Energie des Systems in beiden Fällen entgegengesetzt gleiche Änderung. 293

Denn die Änderung der Energie ist im ersten Falle:

$$\delta_p E = \sum_1^r{}_\tau \frac{\partial_p E}{\partial p_\tau} \delta p_\tau$$

und im zweiten Falle:

$$\delta_q E = \sum_1^r{}_\tau \frac{\partial_q E}{\partial p_\tau} \delta p_\tau \quad ,$$

also ist nach Bemerkung 4:

$$\delta_p E = - \delta_q E \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Folgerung. Die Komponenten der Beschleunigung eines Systems nach seinen Koordinaten p_ϱ lassen sich auch darstellen in der Form: (nach **291b** und **292**) 294

$$m f_\varrho = \dot{q}_\varrho + \frac{\partial_q E}{\partial p_\varrho} \quad .$$

Schlufsbemerkung zum ersten Buch.

Wie bereits in der Vorbemerkung (1) ausgesprochen wurde, ist den Überlegungen dieses Buches die Erfahrung völlig fern geblieben. Wenn wir also den gewonnenen Beziehungen in der Folge wieder begegnen, so werden wir 295

wissen, dafs sie nicht der Erfahrung entstammen, sondern den gegebenen Gesetzen unserer Anschauung und unseres Denkens, zusammen mit einer Reihe willkürlicher Festsetzungen.

Es ist wahr, dafs Bildung der Begriffe und Entwickelung ihrer Beziehungen nur geschahen im Hinblick auf mögliche Erfahrungen; es ist also nicht minder wahr, dafs einzig die Erfahrung zu entscheiden hat über Wert oder Unwert unserer Überlegungen. Die Richtigkeit oder Unrichtigkeit dieser Überlegungen aber kann durch keine mögliche zukünftige Erfahrung weder bestätigt noch widerlegt werden.

ZWEITES BUCH.

MECHANIK DER MATERIELLEN SYSTEME.

Vorbemerkung. In diesem zweiten Buch werden wir unter Zeiten, Räumen, Massen Zeichen für Gegenstände der äufseren Erfahrung verstehen, deren Eigenschaften übrigens den Eigenschaften nicht widersprechen, welche wir vorher den gleichbenannten Gröfsen als Formen unserer inneren Anschauung oder durch Definition beigelegt hatten. Unsere Aussagen über die Beziehungen zwischen Zeiten, Räumen und Massen sollen daher nicht mehr allein den Ansprüchen unseres Geistes genügen, sondern sie sollen zugleich auch möglichen, insbesondere zukünftigen Erfahrungen entsprechen. Diese Aussagen stützen sich daher auch nicht mehr allein auf die Gesetze unserer Anschauung und unseres Denkens, sondern aufserdem auf vorangegangene Erfahrung. Den Anteil der letzteren aber, soweit er nicht schon in den Grundbegriffen enthalten ist, werden wir zusammenfassen in eine einzige allgemeine Aussage, welche wir als Grundgesetz voranstellen. Eine spätere, nochmalige Berufung auf die Erfahrung findet dann nicht mehr statt. Die Frage nach der Richtigkeit unserer Aussagen fällt also zusammen mit der Frage nach der Richtigkeit oder Allgemeingültigkeit jener einzigen Aussage. 296

Abschnitt 1. Zeit, Raum, Masse.

Zeit, Raum und Masse schlechthin sind unserer Erfahrung in keinem Sinne zugänglich, sondern nur bestimmte Zeiten, bestimmte räumliche Gröfsen, bestimmte Massen. Jede be- 297

stimmte Zeit, räumliche Gröfse oder Masse aber kann das Ergebnis einer bestimmten Erfahrung bilden. Wir machen nämlich jene Begriffe zu Zeichen für Gegenstände der äufseren Erfahrung, indem wir festsetzen, durch welche sinnlichen Wahrnehmungen wir bestimmte Zeiten, räumliche Gröfsen und Massen festlegen wollen. Die Beziehungen, welche wir aussagen als bestehend zwischen Zeiten, Räumen und Massen sind alsdann in Zukunft Beziehungen zwischen eben diesen sinnlichen Wahrnehmungen.

298 **Festsetzung 1.** Die Dauer der Zeit bestimmen wir mit Hülfe des Chronometers nach der Zahl der Schläge seines Pendels. Die Einheit der Dauer setzen wir durch willkürliche Übereinkunft fest. Als Merkmal eines bestimmten Augenblicks dient uns sein zeitlicher Abstand von einem durch weitere willkürliche Übereinkunft festgesetzten Augenblick.

Diese Festsetzung enthält erfahrungsmäfsig nichts, was uns hinderte, die Zeit als stets unabhängige, niemals abhängige, auch stetig von einem Wert zum andern übergehende Variabele zu benutzen. Die Festsetzung ist auch bestimmt und eindeutig, abgesehen von solchen Unsicherheiten, welche es uns überhaupt nicht gelingt aus unserer Erfahrung fern zu halten, weder aus der früheren, noch aus der zukünftigen.

299 **Festsetzung 2.** Die Verhältnisse des Raumes bestimmen wir nach den Regeln der praktischen Geometrie mit Hülfe des Mafsstabes. Die Einheit der Länge setzen wir fest durch willkürliche Übereinkunft. Als Merkmal eines bestimmten Ortes im Raume dient uns seine relative Lage gegen ein in Hinsicht des entfernteren Fixsternhimmels ruhendes, im übrigen durch willkürliche Übereinkunft festgesetztes Koordinatensystem.

Bei Anwendung aller Aussagen der Euklid'schen Geometrie auf die so bestimmten räumlichen Verhältnisse stossen wir erfahrungsmäfsig auf keine Widersprüche. Unsere Festsetzung ist auch bestimmt und eindeutig, abgesehen von Unsicherheiten, welche es uns nicht gelingt aus unserer wirklichen Erfahrung fernzuhalten, weder aus der früheren, noch aus der zukünftigen.

300 **Festsetzung 3.** Die mit den greifbaren Körpern bewegten Massen bestimmen wir mit Hülfe der Wage. Als Einheit der

Masse dient uns die Masse eines durch willkürliche Übereinkunft festgesetzten Körpers.

Die nach dieser Festsetzung bestimmte Masse der greifbaren Körper besitzt die Eigenschaften, welche wir der begrifflich definierten Masse beilegten. Sie kann nämlich in beliebig viele gleiche Massenteilchen geteilt gedacht werden, deren jedes unzerstörbar und unveränderlich ist und als Merkmal dienen kann, um einen Punkt des Raumes zu einer Zeit einem Punkt des Raumes zu jeder anderen Zeit eindeutig und bestimmt zuzuordnen (3). Die Festsetzung ist auch in Hinsicht der greifbaren Körper bestimmt und eindeutig, abgesehen von den Unsicherheiten, welche es überhaupt nicht gelingt aus unserer wirklichen Erfahrung fernzuhalten, weder aus der früheren, noch aus der zukünftigen.

Zusatz zu Festsetzung 3. Übrigens lassen wir die Ver- 301
mutung zu, dafs es neben den greifbaren Körpern auch andere Körper gebe, welche wir nicht ergreifen, nicht bewegen, nicht auf die Wage legen können, und auf welche daher die Festsetzung 3 keine Anwendung finden kann. Die Massen solcher Körper können nur durch Hypothese bestimmt werden.

Was diese hypothetisch anzunehmenden Massen anlangt, so steht es in unserer Macht, ihnen keine Eigenschaften durch die Hypothese beizulegen, welche den Eigenschaften der begrifflich definierten Masse widersprächen.

Anmerkung 1. Die vorstehenden drei Festsetzungen sind 302
nicht neue Definitionen für die schon vorher fest definierten Gröfsen Zeit, Raum und Masse. Vielmehr stellen sie die Abbildungsgesetze dar, durch welche wir äufsere Erfahrung, d. h. konkrete sinnliche Empfindungen und Wahrnehmungen übertragen in die Zeichensprache unseres inneren Bildes (vergleiche die Einleitung), und durch welche wir rückwärts die denknotwendigen Folgen dieses Bildes wieder übersetzen in die Gestalt möglicher sinnlicher Empfindungen und Wahrnehmungen. Erst durch diese drei Festsetzungen werden also die Zeichen Zeit, Raum und Masse zu Teilen unserer Scheinbilder der äufseren Gegenstände. Erst durch diese drei Festsetzungen auch werden sie weitergehenden Ansprüchen unterworfen, als der Denknotwendigkeit unseres Geistes.

303 **Anmerkung 2.** Die Unbestimmtheiten, welche unsere Festsetzungen enthalten, und welche wir in denselben anerkannten, sind also nicht Unbestimmtheiten unserer Bilder, auch nicht unserer Abbildungsgesetze, sondern es sind Unbestimmtheiten der abzubildenden äufseren Erfahrung selbst. Wir wollen damit sagen, dafs wir durch thatsächliche Bestimmung mit Hülfe unserer Sinne doch keine Zeit genauer festlegen können, als sie sich messen läfst mit Hülfe der besten Chronometer, keine Lage genauer als sie sich beziehen läfst auf ein mit dem entfernteren Fixsternhimmel ruhendes Koordinatensystem, keine Masse genauer, als die besten Wagen sie uns liefern.

304 **Anmerkung 3.** Es ist gleichwohl anscheinend die Frage berechtigt, ob durch unsere drei Festsetzungen wahre oder absolute Mafse der Zeit, des Raumes und der Masse gegeben seien, und diese Frage ist nach der Wahrscheinlichkeit zu verneinen, da unsere Festsetzungen offenbar Zufälligkeiten und Willkür enthalten. In Wahrheit aber fällt diese Frage aus unserer Betrachtung heraus und berührt ihre Richtigkeit nicht, selbst wenn wir der Frage einen deutlichen Sinn beilegen und sie verneinen wollen. Es genügt, dafs unsere Festsetzungen solche Mafse bestimmen, in welchen wir frühere und zukünftige Erfahrungen eindeutig bestimmt aussprechen und mitteilen können. Würden wir andere Mafse festsetzen, so würde sich die Form unserer Aussagen entsprechend ändern, in solcher Weise aber, dafs die ausgesagten Erfahrungen, die vergangenen und die zukünftigen, dieselben blieben.

Materielles System.

305 **Erklärung.** Unter einem materiellen System ist fortan ein System von Massen der Erfahrung verstanden, dessen Eigenschaften den Eigenschaften der begrifflich definierten materiellen Systeme nicht widersprechen. In einem natürlichen materiellen Systeme sind also gewisse Lagen und Verrückungen möglich, andere unmöglich, und es genügt die Gesamtheit der möglichen Lagen und Verrückungen den Be-

dingungen der Stetigkeit (121). In einem natürlichen freien Systeme sind die Zusammenhänge unabhängig von der Lage des Systems gegen alle ihm nicht angehörenden Massen, und unabhängig von der Zeit (122).

Bemerkung dazu. Erfahrungsmäfsig entspricht den so 306
definierten Begriffen auch ein wirklicher Inhalt.

Erstens nämlich lehrt uns die Erfahrung, dafs es Zusammenhänge und zwar stetige Zusammenhänge zwischen den Massen der Natur giebt. Es giebt also materielle Systeme im Sinne von **305**. Wir dürfen sogar behaupten, dafs andere als stetige Zusammenhänge in der Natur nicht gefunden werden, und dafs also jedes natürliche System materieller Punkte zugleich ein materielles System sei.

Zweitens lehrt uns die Erfahrung, dafs die Zusammenhänge eines materiellen Systems unabhängig sein können von seiner Lage gegen andere Systeme und von seiner absoluten Lage überhaupt. Wir dürfen sogar behaupten, dafs diese Unabhängigkeit stets eintritt, sobald ein materielles System von allen anderen Systemen räumlich hinreichend entfernt wird. Es giebt also Systeme, welche nur innere Zusammenhänge haben, und wir besitzen auch ein allgemeines Mittel, solche Systeme zu erkennen und herzustellen.

Endlich lehrt uns die Erfahrung drittens, dafs die absolute Zeit ohne Einflufs auf die Vorgänge in natürlichen Systemen ist, welche nur inneren Zusammenhängen unterliegen. Jedes derartige natürliche System ist daher auch nur gesetzmäfsigen Zusammenhängen unterworfen und ist daher ein freies System. Es giebt also auch freie Systeme im Sinne von **305**, und wir können freie Systeme herstellen und als solche erkennen unabhängig von den Aussagen, welche wir weiter über freie Systeme vorzutragen haben werden.

Anmerkung. Die gesetzmäfsigen Zusammenhänge der 307
freien Systeme bilden die unabhängig von der Zeit bestehenden Eigenschaften derselben. Es fällt der experimentellen Physik die Aufgabe zu, aus der unendlichen Erscheinungswelt solche endliche Gruppen von Massen herauszulösen, welche als freie Systeme selbständig bestehen können, und aus den

in der Zeit und in Verbindung mit anderen Systemen verlaufenden Erscheinungen derselben ihre aufserzeitlichen Eigenschaften abzuleiten.

Abschnitt 2. Das Grundgesetz.

308 Wir betrachten es als die Aufgabe der Mechanik, aus den von der Zeit unabhängigen Eigenschaften materieller Systeme die in der Zeit verlaufenden Erscheinungen derselben und ihre von der Zeit abhängigen Eigenschaften abzuleiten. Zur Lösung dieser Aufgabe stellen wir der Mechanik das folgende und nur das folgende, der Erfahrung entnommene Grundgesetz zur Verfügung:

309 **Grundgesetz.** Jedes freie System beharrt in seinem Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung in einer geradesten Bahn.

Systema omne liberum perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directissimam.

Bemerkungen dazu.

310 1. Das Grundgesetz enthält nach dem Wortlaut nur Aussagen, welche sich auf freie Systeme beziehen. Da aber jeder Teil eines freien Systemes ein unfreies System ist, so lassen sich aus dem Grundgesetz auch Folgerungen ableiten, welche sich auf unfreie Systeme beziehen.

311 2. Die Gesamtheit der Folgerungen, welche aus dem Grundgesetz in Hinsicht freier Systeme und ihrer unfreien Teile abgeleitet werden können, bildet den Inhalt der Mechanik. Andere Ursachen der Bewegung, als welche aus dem Grundgesetz entspringen, kennt unsere Mechanik nicht. Die Kenntnis des Grundgesetzes ist nach unserer Auffassung desselben nicht allein notwendig zur Lösung der Aufgabe der Mechanik, son-

dern auch hinreichend zu diesem Zwecke, und dies ist ein wesentlicher Teil unserer Behauptung.

3. **(Definition.)** Jede Bewegung eines freien materiellen 312
Systems oder seiner Teile, welche im Einklange mit dem Grundgesetz erfolgt, nennen wir eine natürliche Bewegung des Systems im Gegensatz zu den denkbaren und den möglichen Bewegungen desselben (257, 258).

Die Mechanik handelt also von den natürlichen Bewegungen der freien materiellen Systeme und ihrer Teile.

4. Wir betrachten eine Erscheinung der Körperwelt als 313
mechanisch und damit als physikalisch erklärt, wenn wir sie erkannt haben als denknotwendige Folge des Grundgesetzes und der von der Zeit unabhängigen Eigenschaften materieller Systeme.

5. Die vollständige Erklärung der Erscheinungen der 314
Körperwelt würde also erfordern: 1. ihre mechanische oder physikalische Erklärung; 2. eine Erklärung des Grundgesetzes; 3. die Erklärung der aufserzeitlichen Eigenschaften der Körperwelt. Die zweite und dritte dieser Erklärungen aber rechnen wir nicht mehr in das Gebiet der Physik.

Berechtigung des Grundgesetzes.

Das Grundgesetz betrachten wir als das wahrscheinliche 315
Ergebnis allgemeinster Erfahrung. Genauer gesprochen ist das Grundgesetz eine Hypothese oder Annahme, welche viele Erfahrungen einschliefst, welche durch keine Erfahrung widerlegt wird, welche aber mehr aussagt, als durch sichere Erfahrungen zur Zeit erwiesen werden kann. Hinsichtlich ihres Verhaltens zum Grundgesetz lassen sich nämlich die materiellen Systeme der Natur in drei Klassen einteilen.

1. Die erste Klasse umfafst solche Körpersysteme oder 316
Teile solcher Körpersysteme, welche den Bedingungen der freien Systeme nach dem unmittelbaren Ergebnis der Erfahrung genügen, und auf welche das Grundgesetz ohne weiteres An-

wendung findet. Hierher gehören z. B. starre Körper, welche sich im leeren Raum, oder vollkommene Flüssigkeiten, welche sich in geschlossenen Gefäſsen bewegen.

Aus den Erfahrungen an solchen Körpersystemen ist das Grundgesetz abgeleitet. In Hinsicht dieser ersten Klasse stellt es eine nackte Erfahrungsthatsache dar.

317 **2.** Die zweite Klasse umfaſst solche Körpersysteme, welche dann, aber auch nur dann den Voraussetzungen des Grundgesetzes sich fügen, oder welche dann, aber auch nur dann dem Grundgesetze folgen, wenn der unmittelbaren sinnlichen Erfahrung gewisse angebbare Hypothesen über ihre Natur hinzugefügt werden.

a) Hierher gehören erstens diejenigen Systeme, welche der Bedingung der Stetigkeit in einzelnen Lagen nicht zu genügen scheinen, also diejenigen Systeme, in welchen Stöſse im weitesten Sinne vorkommen. Hier genügt die im höchsten Grade wahrscheinliche Hypothese, daſs alle Unstetigkeiten scheinbare sind und verschwinden, sobald es uns gelingt, hinreichend kleine Raum- und Zeitteile in Betracht zu ziehen.

b) Hierher gehören zweitens diejenigen Systeme, in welchen Fernkräfte, die Kräfte der Wärme, und andere, nicht immer vollständig verstandene Bewegungsursachen thätig sind. Wenn wir die greifbaren Körper solcher Systeme zur Ruhe bringen, so verharren sie nicht in diesem Zustande, sondern setzen sich, freigemacht, aufs neue in Bewegung. Sie folgen also scheinbar nicht dem Grundgesetz. Hier wird die Hypothese immer wahrscheinlicher, daſs die greifbaren Körper nicht die einzigen Massen, ihre sichtbaren Bewegungen nicht die einzigen Bewegungen solcher Systeme sind, sondern daſs, wenn wir die sichtbaren Bewegungen der greifbaren Körper zur Ruhe gebracht haben, noch andere, verborgene Bewegungen in den Systemen bestehen, welche sich dann, wenn wir die greifbaren Körper freigeben, diesen aufs neue mitteilen. Über diese verborgenen Bewegungen lassen sich, wie es scheint, stets solche Annahmen machen, daſs die vollständigen Systeme dem Gesetze gehorchen.

In Hinsicht dieser zweiten Klasse von natürlichen Systemen trägt das Grundgesetz den Charakter einer teils sehr, teils

ziemlich wahrscheinlichen, aber stets, soweit wir sehen, einer zulässigen Hypothese.

3. Die dritte Klasse der Körpersysteme enthält solche 318
Systeme, deren Bewegungen sich nicht ohne weiteres als notwendige Folgen des Grundgesetzes darstellen lassen, und für welche auch keine bestimmten Hypothesen angegeben werden können, durch welche sie unter das Gesetz gefügt würden. Hierher gehören z. B. alle Systeme, welche organische oder belebte Wesen enthalten. Unsere Unkenntnis aller hierher gehörigen Systeme ist aber so grofs, dafs auch der Beweis nicht geführt werden kann, dafs solche Hypothesen unmöglich seien und dafs die Erscheinungen an diesen Systemen dem Gesetz widersprechen.

Hinsichtlich dieser dritten Klasse von Körpersystemen trägt also das Grundgesetz den Charakter einer zulässigen Hypothese.

Anmerkung. Wenn es zulässig ist, anzunehmen, dafs es 319
in der Natur kein freies System giebt, welches dem Grundgesetze nicht gehorchte, so ist es zulässig, jedes System überhaupt anzusehen als ein solches freies System oder als Teil eines solchen freien Systemes, so dafs es dann in der That kein System in der Natur giebt, dessen Bewegungen nicht durch seine Zusammenhänge und das Grundgesetz bestimmt wären.

Einschränkung des Grundgesetzes.

In einem Körpersystem, welches dem Grundgesetze ge- 320
horcht, giebt es keine neue Bewegung, noch auch Ursachen neuer Bewegung, sondern nur die Fortsetzung der bisherigen Bewegung in gewisser einfacher Weise. Man kann kaum umhin, ein solches Körpersystem als ein lebloses oder totes zu bezeichnen. Wollte man also den Satz auf die gesamte Natur als das allgemeinste freie materielle System erweitern, und aussagen: die gesamte Natur verfolge mit gleichbleibender Geschwindigkeit eine geradeste Bahn, so würde man sich in Widerspruch setzen zu einem gesunden und natürlichen Ge-

fühl. Es erscheint daher vorsichtiger, die wahrscheinliche Gültigkeit des Satzes zu beschränken auf leblose Systeme. Es trifft dies zusammen mit der Aussage, dafs der Satz, angewandt auf die Systeme der dritten Klasse (318), eine unwahrscheinliche Hypothese bilde.

321 Auf diese Erwägung ist indessen im Folgenden keine Rücksicht genommen, und es ist auch nicht nötig, Rücksicht auf sie zu nehmen, weil, wie wir sahen, das Grundgesetz auch in Hinsicht dieser Systeme eine wenn auch nicht wahrscheinliche, so doch zulässige Hypothese bildet. Könnte der Nachweis geführt werden, dafs die belebten Systeme dem Satz widersprechen, so würden diese dadurch aus der Mechanik ausscheiden. Zugleich würde dann, aber auch erst dann, unsere Mechanik eine Ergänzung erfordern in bezug auf diejenigen unfreien Systeme, welche zwar selber leblos, aber doch Teile solcher freier Systeme sind, welche belebte Wesen enthalten.

Nach allem, was wir wissen, könnte diese Ergänzung indessen dann auch geleistet werden, und zwar durch die Erfahrung, dafs belebte Systeme auf unbelebte niemals einen anderen Einflufs auszuüben vermögen, als welcher auch durch ein unbelebtes System ausgeübt werden könnte. Darnach ist es möglich, jedem belebten System ein unbelebtes unterzuschieben, welches jenes in den gerade behandelten Problemen zu vertreten vermag, und dessen Angabe wir verlangen dürfen, um das gegebene Problem zu einem rein mechanischen zu machen.

322 **Anmerkung.** In der gewöhnlichen Darstellung der Mechanik wird ein ähnlicher Vorbehalt für überflüssig gehalten, und als sicher angenommen, dafs die Grundgesetze die belebte wie die unbelebte Natur in gleicher Weise umfassen. Es ist dies in jener Darstellung auch erlaubt, da man den Formen der Kräfte, welche dort in die Grundgesetze eintreten, zunächst den weitesten Spielraum läfst und sich vorbehält, später und aufserhalb der Mechanik zu erörtern, ob die Kräfte der belebten und der unbelebten Natur verschieden seien, und welche Eigenschaften etwa die einen vor den anderen auszeichnen. In unserer Darstellung ist gröfsere Vorsicht geboten, da eine bedeutende Zahl von Erfahrungen,

welche sich zunächst nur auf die unbelebte Natur beziehen, in das Grundgesetz selbst schon einbezogen ist, und die Möglichkeit späterer Abgrenzung eine weit beschränktere ist.

Zerlegung des Grundgesetzes.

Die gewählte Fassung des Gesetzes schliefst sich absicht- 323
lich an die Fassung von NEWTON's erstem Bewegungsgesetz unmittelbar an. Offenbar aber enthält diese Fassung drei von einander unabhängige Aussagen, nämlich die folgenden:

1. Ein freies System verfolgt keine anderen seiner möglichen Bahnen, als nur die geradesten Bahnen;
2. Verschiedene freie Systeme beschreiben in identischen Zeiträumen einander proportionale Längen ihrer Bahnen;
3. Die am Chronometer gemessene Zeit (298) wächst proportional der Bahnlänge irgend eines bewegten freien Systems.

Nur die ersten beiden Aussagen enthalten Erfahrungsthatsachen von grofser Allgemeinheit. Die dritte rechtfertigt nur unsere willkürliche Festsetzung der Zeitmessung und enthält nur die besondere Erfahrung, dafs ein Chronometer in gewisser Hinsicht sich verhält wie ein freies System, obgleich es genau genommen kein solches ist.

Methode der Anwendung des Gesetzes.

Wird eine bestimmte Frage in Hinsicht der Bewegung 324
eines materiellen Systemes gestellt, so mufs von den folgenden drei Fällen notwendig einer eintreten:

1. Es kann die Frage so gestellt sein, dafs das Grundgesetz zu einer bestimmten Beantwortung derselben ausreicht. In diesem Falle ist das Problem ein bestimmtes mechanisches Problem, und die Anwendung des Grundgesetzes giebt seine Lösung.

2. Es kann die Frage so gestellt sein, dafs das Grundgesetz 325
zu einer bestimmten Beantwortung derselben unmittelbar nicht

ausreicht, dafs aber der Fragestellung eine oder mehrere Annahmen hinzugefügt werden können, durch welche die bestimmte Anwendung des Grundgesetzes möglich gemacht wird.

Ist nur eine einzige solche Annahme möglich, und setzen wir voraus, dafs das Problem überhaupt ein mechanisches Problem sei, so mufs diese Annahme auch zutreffend sein; das Problem kann also als ein bestimmtes mechanisches Problem betrachtet werden, und die Anwendung der hinzugefügten Annahme und des Grundgesetzes giebt die Lösung.

Sind mehrere Annahmen möglich, und setzen wir voraus, dafs das Problem überhaupt ein mechanisches Problem sei, so mufs eine dieser Annahmen zutreffen; das Problem kann alsdann als ein unbestimmtes mechanisches Problem betrachtet werden, und die Anwendung des Grundgesetzes auf die verschiedenen möglichen Annahmen giebt die möglichen Lösungen.

326 3. Es kann die Frage so gestellt sein, dafs das Grundgesetz zur Beantwortung nicht ausreicht, und dafs auch keine Annahmen hinzugefügt werden können, durch welche die Anwendung des Grundgesetzes möglich gemacht würde. In diesem Falle mufs in den Voraussetzungen der Fragestellung selbst ein Widerspruch liegen gegen das Grundgesetz oder gegen die Eigenschaften der Systeme, auf welche sie sich bezieht; die gestellte Frage kann alsdann überhaupt nicht als ein mechanisches Problem betrachtet werden.

Angenäherte Anwendung des Grundgesetzes.

327 **Bemerkung.** Wenn aus den gegebenen Bedingungsgleichungen eines Systems zusammen mit dem Grundgesetze Gleichungen folgen, welche genau die Form der Bedingungsgleichungen haben, so ist es für die Bestimmung der Bewegung des Systems gleichgültig, ob wir allein jene ursprünglichen, oder neben und statt derselben die abgeleiteten Bedingungsgleichungen als Darstellungen des Zusammenhanges des Systems betrachten.

Denn wenn wir auch aus der Reihe der ursprünglichen Bedingungsgleichungen alle diejenigen streichen, welche schon analytisch aus den übrigen und aus den abgeleiteten Bedin-

gungsgleichungen folgen, so genügen doch den jetzt übrig bleibenden ursprünglichen und abgeleiteten Gleichungen sicherlich nur mögliche Verrückungen, wenn auch im allgemeinen nicht alle Verrückungen, welche nach den ursprünglichen Gleichungen möglich waren. Eine Bahn, welche unter der ursprünglichen gröfseren Mannigfaltigkeit eine geradeste war, wird es umsomehr unter der jetzigen beschränkteren Mannigfaltigkeit sein. Und da sich die natürlichen Bahnen unter dieser beschränkteren Mannigfaltigkeit finden müssen, so sind die natürlichen Bahnen die geradesten unter denjenigen, welche nach den jetzigen Bedingungsgleichungen möglich sind. Dies ist aber die Behauptung.

Folgerung 1. Gewinnen wir aus der Erfahrung die 328
Kenntnis, dafs ein System gewissen Bedingungsgleichungen thatsächlich genügt, so ist es für die Anwendung des Grundgesetzes vollständig gleichgültig, ob jene Zusammenhänge ursprüngliche, d. h. physikalisch nicht weiter erklärbare (**313**) sind, oder ob es Zusammenhänge sind, welche sich darstellen lassen als die notwendige Folge anderer Zusammenhänge und des Grundgesetzes, welche also eine mechanische Erklärung zulassen.

Folgerung 2. Gewinnen wir aus der Erfahrung die 329
Kenntnis, dafs gewissen Bedingungsgleichungen eines materiellen Systems nur angenähert, nicht aber genau genügt werde, so ist es gleichwohl zulässig, jene Bedingungsgleichungen als angenäherte Darstellungen eines wahren Zusammenhanges bestehen zu lassen und durch Anwendung des Grundgesetzes auf sie angenäherte Aussagen über die Bewegung des Systems zu gewinnen, obwohl es unzweifelhaft feststeht, dafs jene angenäherten Bedingungsgleichungen nicht einen ursprünglichen, stetigen, gesetzmäfsigen Zusammenhang darstellen, sondern nur als die angenäherte Folge unbekannter Zusammenhänge und des Grundgesetzes angesehen werden können.

Anmerkung. Auf der vorstehenden Folgerung beruht jede 330
praktische Anwendung unserer Mechanik. Denn bei allen Zusammenhängen zwischen grobsinnlichen Massen, welche die Physik entdeckt und die Mechanik verwertet, lehrt eine hin-

reichend genaue Untersuchung, dafs sie nur angenäherte Gültigkeit haben und daher nur abgeleitete Zusammenhänge sein können. Die letzten, ursprünglichen Zusammenhänge sind wir gezwungen in der Welt der Atome zu suchen, und sie sind uns unbekannt. Aber auch wenn sie uns bekannt wären, müfsten wir auf ihre Benutzung zu praktischen Zwecken verzichten und verfahren, wie wir verfahren. Denn die wirkliche Beherrschung jedes Problems erfordert stets die Beschränkung der Betrachtung auf eine äufserst kleine Zahl von Variabelen, während das Zurückgehen auf die Zusammenhänge der Atome die Einführung einer unermefslichen Zahl von Veränderlichen nötig machen würde.

Dafs wir aber das Grundgesetz so anwenden dürfen, wie wir es anwenden, ist nicht als eine neue Erfahrung neben dem Grundgesetz anzusehen, sondern ist, wie wir sahen, eine notwendige Folge eben dieses Gesetzes selbst.

Abschnitt 3. Bewegung der freien Systeme.

Allgemeine Eigenschaften der Bewegung.

I. Bestimmtheit der Bewegung.

331 **Lehrsatz.** Eine natürliche Bewegung eines freien Systems ist eindeutig bestimmt durch die Angabe der Lage und der Geschwindigkeit des Systems zu einer bestimmten Zeit.

Denn durch die Lage und die Richtung der Geschwindigkeit ist die Bahn des Systems eindeutig bestimmt (161); die konstante Geschwindigkeit des Systems in seiner Bahn ist durch die Gröfse der Geschwindigkeit zur Anfangszeit gegeben.

332 **Folgerung 1.** Durch den gegenwärtigen Zustand (261) eines freien Systems sind seine zukünftigen Zustände und seine vergangenen Zustände zu allen Zeiten eindeutig bestimmt.

333 **Folgerung 2.** Könnte man in irgend einer Lage die Geschwindigkeit eines Systems umkehren (was niemals gegen die

Bedingungsgleichungen des Systems verstofsen würde), so würde das System die Lagen seiner vorherigen Bewegung in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen.

Bemerkung 1. In einem freien holonomen System (123) giebt 334
es stets eine natürliche Bewegung, welche das System in gegebener Zeit aus einer willkürlich gegebenen Anfangs- in eine willkürlich gegebene Endlage überführt.

Denn es ist stets eine natürliche Bahn zwischen beiden Lagen möglich (192); in dieser Bahn ist jede Geschwindigkeit zulässig, also auch eine solche, welche das System in der gegebenen Zeit die gegebene Strecke durchlaufen läfst.

Anmerkung. Die vorige Bemerkung bleibt richtig, wenn 335
an Stelle der Zeit des Überganges die Geschwindigkeit des Systems in seiner Bahn oder auch die Energie des Systems gesetzt wird.

Bemerkung 2. Ein freies System, welches kein holonomes 336
ist, kann nicht aus jeder möglichen Anfangslage in jede mögliche Endlage durch eine natürliche Bewegung übergeführt werden (162).

Lehrsatz. Eine natürliche Bewegung eines freien holo- 337
nomen Systems ist bestimmt durch die Angabe zweier Lagen, in welchen sich das System zu zwei bestimmten Zeiten finden soll.

Denn durch diese Angabe ist die Bahn des Systems bestimmt und die Geschwindigkeit in dieser Bahn.

Anmerkung 1. Die Bestimmung einer natürlichen Be- 338
wegung durch zwei Lagen, zwischen welchen sie stattfindet, ist im allgemeinen eine mehrdeutige; sie ist eine eindeutige, sobald die Entfernung der beiden Lagen ein gewisses endliches Mafs nicht überschreitet und die Länge der beschriebenen Bahn von der Ordnung dieser Entfernung sein soll (vgl. **167, 172, 190 u. 176**).

Anmerkung 2. Eine natürliche Bewegung eines freien 339
holonomen Systems ist, abgesehen von dem absoluten Wert

der Zeit, auch bestimmt durch zwei Lagen des Systems und entweder die Zeitdauer des Überganges oder die Geschwindigkeit des Systems in seiner Bahn oder die Energie des Systems.

2. Erhaltung der Energie.

340 **Lehrsatz.** Die Energie eines in beliebiger Bewegung begriffenen freien Systems ändert sich nicht mit der Zeit.

Denn die Energie setzt sich zusammen (282) aus der Masse des Systems, welche unveränderlich ist, und der Geschwindigkeit längs der Bahn, welche ebenfalls unveränderlich ist.

341 **Anmerkung 1.** Von den drei Teilaussagen, in welche wir das Grundgesetz zerlegten (323), bedurften wir zum Beweise des Satzes nur die zweite und dritte. Wir können auch die dritte entbehrlich machen, und den Satz von einer bestimmten Art der Zeitmessung unabhängig aussagen, wenn wir ihm die Form geben:

Das Verhältnis der Energieen irgend zweier in beliebiger Bewegung begriffener freier Systeme ändert sich nicht mit der Zeit.

342 **Anmerkung 2.** Der Satz von der Erhaltung der Energie ist eine notwendige Folge des Grundgesetzes. Umgekehrt folgt aus dem Satz von der Erhaltung der Energie die zweite Teilaussage (323) jenes Gesetzes, aber nicht die erste, also nicht das ganze Gesetz. Es wären natürliche Systeme denkbar, für welche der Satz von der Erhaltung der Energie gälte, und welche sich dennoch nicht in geradesten Bahnen bewegten. Es wäre zum Beispiel denkbar, dafs der Satz von der Erhaltung der Energie Gültigkeit hätte auch für belebte Systeme, und dafs dieselben dennoch sich unserer Mechanik entzögen. Umgekehrt liefsen sich auch natürliche Systeme denken, welche sich nur in geradesten Bahnen bewegten, und für welche dennoch der Satz von der Erhaltung der Energie keine Gültigkeit hätte.

343 **Anmerkung 3.** Es ist in neuerer Zeit mehrfach die Ansicht vorgetragen worden, dafs die Energie bewegter Systeme an einen bestimmten Ort gebunden sei und sich von Ort zu

Ort fortpflanze. Man hat deshalb die Energie, wie in Hinsicht der Unzerstörbarkeit, so auch in dieser Hinsicht mit der Materie in Vergleich gestellt. Diese Auffassung der Energie weicht offenbar sehr weit ab von der Auffassung der hier vorgetragenen Mechanik. Mit dem gleichen Rechte, aber nicht mit gröfserem Rechte, kann man sagen: die Energie eines bewegten Systems sei am Orte des Systems vorhanden, mit welchem man sagen kann: die Geschwindigkeit eines bewegten Körpers sei an den Ort desselben gebunden. Diese letztere Ausdrucksweise aber ist mit Recht ungebräuchlich.

3. Kleinste Beschleunigung.

Lehrsatz. Ein freies System bewegt sich in solcher Weise, 344
dafs die Gröfse seiner Beschleunigung in jedem Augenblick die kleinste ist, welche mit der augenblicklichen Lage, der augenblicklichen Geschwindigkeit und dem Zusammenhange des Systems sich verträgt.

Denn das Quadrat der Gröfse der Beschleunigung ist nach **280** und **281** gleich

$$v^4 c^2 + \dot{v}^2 \quad .$$

Da nun für die natürliche Bewegung $\dot{v} = 0$ ist, v einen durch die augenblickliche Geschwindigkeit gegebenen Wert hat und c den kleinsten Wert hat, welcher mit der gegebenen Richtung der Bewegung und dem Zusammenhange des Systems verträglich ist, so nimmt der Ausdruck selbst den kleinsten, mit den genannten Nebenumständen verträglichen Wert an.

Anmerkung 1. Die in dem vorigen Lehrsatz ausgesagte 345
Eigenschaft der natürlichen Bewegung bestimmt diese Bewegung eindeutig, und es kann daher der Lehrsatz das Grundgesetz vollständig vertreten.

Denn soll der Ausdruck

$$v^4 c^2 + \dot{v}^2$$

ein Minimum werden, so mufs zunächst $\dot{v} = 0$ sein, also das

System seine Bahn mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen, zweitens mufs entweder $v = 0$ sein — alsdann ruht das System — oder c mufs den kleinsten, bei der Richtung der Bahn möglichen Wert haben, — dann ist die Bahn eine geradeste.

346 **Anmerkung 2.** Der Lehrsatz **344** würde, als Grundgesetz vorangestellt, vor der benutzten Form sogar den Vorzug haben, dafs er das Gesetz in eine einzige unteilbare Aussage zusammenfafste, nicht nur äufserlich in einen Satz. Die benutzte Form hat aber den Vorzug, dafs sie ihre Bedeutung klarer und durchsichtiger erkennen läfst.

4. Kürzeste Bahn.

347 **Lehrsatz.** Die natürliche Bahn eines freien holonomen Systems zwischen irgend zwei hinreichend benachbarten Lagen ist kürzer als irgend eine andere mögliche Bahn zwischen beiden Lagen.

Denn in einem holonomen System ist eine geradeste Bahn zwischen hinreichend benachbarten Lagen zugleich die kürzeste (**190**, **176**).

348 **Anmerkung 1.** Wird die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Lagen weggelassen, so kann nicht mehr behauptet werden, dafs die natürliche Bahn kürzer sei als alle anderen Bahnen, nicht einmal, dafs sie kürzer sei als alle benachbarten Bahnen; es gilt aber immer noch die in dem vorigen Satz enthaltene Behauptung, dafs die Variation der Länge der Bahn verschwinde beim Übergang zu irgend einer benachbarten möglichen Bahn (**190**, **171**).

349 **Anmerkung 2.** Der vorige Lehrsatz entspricht dem Prinzip der kleinsten Wirkung in der Form, welche Jacobi diesem Prinzip gegeben hat. Denn nennen wir für den Augenblick m_ν die Masse, ds_ν die Weglänge des ν ten der n Punkte des Systems in einem bestimmten Zeitelement, so sagt der Lehrsatz aus, dafs die Variation des Integrals

$$\int ds = \frac{1}{\sqrt{m}} \int \sqrt{\sum_{1}^{n} {}_{\nu}\, m_\nu \, ds_\nu^2}$$

verschwinde bei der natürlichen Bewegung des Systems, und dies ist die Jacobi'sche Form jenes Prinzips.

Anmerkung 3. Um das Verhältnis zwischen dem Lehrsatz **347** und dem Jacobi'schen Satz genauer festzustellen, müssen wir aussagen: Nach der gewöhnlichen Auffassung der Mechanik enthält der Lehrsatz einen besonderen Fall des Jacobi'schen Satzes, den Fall nämlich, dafs keine Kräfte wirken. 350

Nach unserer Auffassung sind umgekehrt die Voraussetzungen des vollständigen Jacobi'schen Satzes als die engeren zu bezeichnen, und der Jacobi'sche Satz ist nach dieser Auffassung eine Anpassung des Lehrsatzes an besondere Verhältnisse und seine Umformung auf die Voraussetzungen derselben.

Anmerkung 4. Der Lehrsatz **347** hat den Satz von der Erhaltung der Energie weder zur Voraussetzung, noch zur Folge, sondern ist von demselben ganz unabhängig. Zusammen mit dem Satz von der Energie vermag er das Grundgesetz vollständig zu ersetzen, jedoch nur für holonome Systeme. Angewandt auf andere Systeme würde der Satz allerdings auch bestimmte Bewegungen ergeben, aber diese Bewegungen würden dem Grundgesetz widersprechen (**194**), also falsche Lösungen der gestellten mechanischen Probleme sein. 351

5. Kürzeste Zeit.

Lehrsatz. Die natürliche Bewegung eines freien holonomen Systems führt das System in kürzerer Zeit aus einer gegebenen Anfangslage in eine hinreichend benachbarte Endlage, als es durch irgend eine andere mögliche, mit dem gleichen konstanten Wert der Energie ausgeführte Bewegung geschehen könnte. 352

Denn ist für alle verglichenen Bewegungen die Energie, also die Bahngeschwindigkeit die gleiche, so ist die Dauer des Übergangs der Bahnlänge proportional, also die kleinste für die kürzeste Bahn, also für die natürliche Bahn.

353 **Anmerkung.** Fällt die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Lagen fort, so wird die Zeit des Übergangs nicht mehr notwendig ein Minimum, aber sie behält immer noch die Eigenschaft, gleich zu sein für die natürliche Bahn und alle ihr unendlich benachbarten möglichen Bahnen (vergl. **348**).

354 **Folgerung 1.** Für die natürliche Bewegung eines freien holonomen Systems zwischen gegebenen, hinreichend benachbarten Endlagen ist das Zeitintegral der Energie kleiner, als für irgend eine andere mögliche, mit dem gleichen konstanten Wert der Energie ausgeführte Bewegung.

Denn es ist jenes Zeitintegral gleich dem Produkt aus dem gegebenen konstanten Wert der Energie und der Zeitdauer des Übergangs.

355 **Anmerkung 1.** Der Lehrsatz **352**, insbesondere in der Form der Folgerung **354**, entspricht dem Maupertuis'schen Prinzip der kleinsten Wirkung. Wollen wir sein Verhältnis zu diesem Prinzipe genauer feststellen, so müssen wir uns in derselben Weise ausdrücken, wie dies in **350** geschehen ist.

356 **Anmerkung 2.** Die Folgerung **354** und auch der Lehrsatz **352** setzen für die mit einander verglichenen Bewegungen die Konstanz der Energie mit der Zeit voraus. Zusammen mit der Voraussetzung, daſs die natürliche Bewegung sich überhaupt unter den verglichenen finde, genügen sie also zur Bestimmung derselben und können das Grundgesetz vertreten, jedoch nur für holonome Systeme. Ihre Voraussetzungen auf andere Systeme angewandt, würden zu falschen mechanischen Lösungen führen.

357 **Folgerung 2.** Ein freies holonomes System wird aus seiner Anfangslage in gegebener Zeit auf gröſsere geradeste Entfernung fortgetragen durch seine natürliche Bewegung, als durch irgend eine andere mögliche Bewegung, welche mit dem

gleichen konstanten Wert der Energie erfolgt, wie die natürliche Bewegung.

6. Kleinstes Zeitintegral der Energie.

Lehrsatz. Das Zeitintegral der Energie ist beim Übergang eines freien holonomen Systems aus einer gegebenen Anfangslage in eine hinreichend benachbarte Endlage kleiner für die natürliche Bewegung, als für jede andere mögliche Bewegung, welche das System in der gleichen Zeit aus der gegebenen Anfangslage in die gegebene Endlage überführt. 358

Vergleichen wir nämlich zunächst nur Bewegungen in einer und derselben Bahn von der Länge S, so erreicht unter diesen das Zeitintegral der Energie sein Minimum für diejenige Bewegung, für welche die Bahngeschwindigkeit v konstant ist. Denn da die Summe der Gröfsen vdt den gegebenen Wert S hat, so wird die Summe der Gröfsen v^2dt dann und nur dann ihren kleinsten Wert erreichen, wenn alle v gleich sind. Ist aber die Bahngeschwindigkeit konstant, so ist das Zeitintegral der Energie gleich $\frac{1}{2}mS^2/T$, wenn T die Dauer des Übergangs ist. Da T gegeben ist, so verhält sich für verschiedene Bahnen des Systems das Zeitintegral der Energie wie das Quadrat der Bahnlänge, erstere Gröfse hat also wie die letztere ihren Minimalwert für die natürliche Bahn.

Anmerkung 1. Fällt die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Lagen fort, so wird das Zeitintegral der Energie nicht mehr notwendig ein Minimum, aber seine Variation verschwindet immer noch beim Übergang zu einer anderen der in Betracht gezogenen Bewegungen (vgl. 348). 359

Anmerkung 2. Der vorstehende Lehrsatz entspricht dem HAMILTON'schen Prinzip. Wollen wir sein Verhältnis zu diesem Prinzipe genauer feststellen, so müssen wir uns derselben Ausdrucksweise bedienen wie in 350. 360

Anmerkung 3. Der Lehrsatz 358 und die Folgerung 354 stimmen darin überein, dafs sie unter gewissen Klassen möglicher Bewegungen die natürliche Bewegung auszeichnen durch 361

ein und dasselbe Merkmal, nämlich den Minimalwert des Zeitintegrals der Energie; sie unterscheiden sich aber wesentlich von einander dadurch, dafs sie ganz verschiedene Klassen möglicher Bewegungen in Betracht ziehen.

362 **Anmerkung 4.** Der Satz von der Erhaltung der Energie ist eine notwendige Folge des Lehrsatzes **358**, und dieser Lehrsatz kann daher, als Prinzip vorangestellt, als vollständiger Ersatz für das Grundgesetz dienen, jedoch nur in der Anwendung desselben auf holonome Systeme. Läfst man die Beschränkung auf holonome Systeme fallen, so ergiebt der Satz zwar auch bestimmte Bewegungen der materiellen Systeme, aber diese widersprechen im allgemeinen dem Grundgesetz und sind also, mechanisch betrachtet, falsche Lösungen der gestellten Probleme.

363 **Rückblick auf 347 bis 362.** Benutzen wir die in den Lehrsätzen **347**, **352**, **354**, **358** ausgesprochenen Eigenschaften der natürlichen Bewegung als Prinzipien zur vollständigen oder teilweisen Bestimmung dieser Bewegung, so machen wir die gegenwärtig eintretenden Änderungen im Zustand des Systems abhängig von solchen Eigentümlichkeiten der Bewegung, welche erst in der Zukunft hervortreten können, und welche oft in menschlichen Verrichtungen als erstrebenswerte Ziele erscheinen. Dieser Umstand hat bisweilen Physiker und Philosophen dazu geführt, in den Gesetzen der Mechanik den Ausdruck einer bewufsten Absicht auf zukünftige Ziele, verbunden mit Voraussicht der zweckmäfsigen Mittel, zu erblicken. Eine solche Auffassung ist aber weder notwendig, noch auch nur zulässig.

364 Dafs nämlich eine solche Auffassung jener Prinzipien nicht notwendig ist, ergiebt sich daraus, dafs die Eigenschaften der natürlichen Bewegung, welche eine Absicht anzudeuten scheinen, als denknotwendige Folgen eines Gesetzes erkannt wurden, in welchem man den Ausdruck einer Voraussicht in die Zukunft nicht findet.

365 Dafs jene Auffassung der Prinzipien aber sogar unzulässig ist, ergiebt sich daraus, dafs die Eigenschaften der natürlichen Bewegung, welche eine Absicht auf zukünftigen Erfolg anzudeuten scheinen, nicht bei allen natürlichen Bewegungen sich

finden. Hätte die Natur wirklich die Absicht, einen kürzesten Weg, einen kleinsten Aufwand an Energie, eine kürzeste Zeit zu erzielen, so wäre es unmöglich zu verstehen, wie es Systeme geben könnte, in welchen diese Absicht, obwohl erreichbar, dennoch der Natur regelmäfsig fehlschlüge.

Will man darin, dafs ein System unter allen möglichen **366**
Bahnelementen beständig ein geradestes auswählt, den Ausdruck eines bestimmten Willens erkennen, so steht dies frei; man sieht alsdann eben schon darin den Ausdruck eines bestimmten Willens, dafs ein natürliches System überhaupt unter allen möglichen Bewegungen keine willkürliche, sondern stets eine durch besondere Merkmale bezeichnete, im voraus bestimmbare Bewegung auswählt.

Analytische Darstellung. Differentialgleichungen der Bewegung.

Erläuterung. Unter den Differentialgleichungen der Be- **367**
wegung eines Systems verstehen wir einen Satz von Differentialgleichungen, in welchen die Zeit die unabhängige Variabele, die Koordinaten des Systems die abhängigen Variabelen sind, und welche zusammen mit einer Anfangslage und einer Anfangsgeschwindigkeit die Bewegung des Systems eindeutig bestimmen (**331**).

Aufgabe 1. Die Differentialgleichungen der Bewegung **368**
eines freien Systems in den rechtwinkligen Koordinaten desselben darzustellen.

In **155 d** haben wir die Differentialgleichungen der geradesten Bahnen des Systems in den rechtwinkligen Koordinaten abgeleitet. In diese Gleichungen führen wir anstatt der Bahnlänge die Zeit t als unabhängige Variabele ein. Nach dem Grundgesetz ist $ds/dt = v$ von t, also auch von s unabhängig, und wir haben:

$$\dot{x}_\nu = x'_\nu v \quad , \qquad \ddot{x}_\nu = x''_\nu v^2 \quad .$$

Multiplizieren wir demnach die Gleichungen **155 d** mit mv^2 und setzen zur Abkürzung für $mv^2\Xi_\iota$ jetzt X_ι, so erhalten wir als Lösung der Aufgabe die $3n$ Gleichungen:

a) $$m_\nu \ddot{x}_\nu + \sum_1^i{}_\iota\, x_{\iota\nu} X_\iota = 0 \quad ,$$

welche zusammen mit den i Gleichungen (vgl. **155 b**):

b) $$\sum_1^{3n}{}_\nu\, x_{\iota\nu}\, \ddot{x}_\nu + \sum_1^{3n}{}_\nu \sum_1^{3n}{}_\mu \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu}\, \dot{x}_\nu\, \dot{x}_\mu = 0$$

die $3n+i$ Gröfsen $\ddot{x}_\nu$ und X_ι als eindeutige Funktionen der x_ν und $\dot{x}_\nu$ bestimmen.

369 **Anmerkung 1.** Die Gleichungen der Bewegung des freien Systems in der Form **368** werden gewöhnlich als LAGRANGE's Gleichungen der ersten Form bezeichnet.

370 **Anmerkung 2.** Jede einzelne der Gleichungen **368 a** giebt uns, nachdem wir die X_ι zuerst bestimmt haben, die Komponente der Beschleunigung des Systems nach einer bestimmten der rechtwinkligen Koordinaten des Systems.

371 **Aufgabe 2.** Die Differentialgleichungen der Bewegung eines freien Systems in den allgemeinen Koordinaten p_ϱ desselben auszudrücken.

Die Differentialgleichungen der geradesten Bahnen in den p_ϱ finden wir in **158 d**. In diese führen wir statt der Bahnlänge die Zeit als unabhängige Variabele ein, indem wir wiederum bemerken, dafs nach dem Grundgesetz ist:

$$\dot{p}_\varrho = p'_\varrho v \quad , \qquad \ddot{p}_\varrho = p''_\varrho v^2 \quad .$$

Indem wir also die Gleichungen **158 d** multiplizieren mit mv^2 und setzen für $mv^2\Pi_\varkappa$ jetzt $P_\varkappa$, so erhalten wir als Lösung der Aufgabe die r Gleichungen:

a) $$m\left\{\sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\ddot{p}_\sigma + \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho}\right)\dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau\right\} + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = 0 \ ,$$

welche zusammen mit den k Gleichungen (vgl. **158b**):

$$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\ddot{p}_\varrho + \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma}\dot{p}_\varrho\dot{p}_\sigma = 0 \qquad \mathbf{b)}$$

die $r + k$ Gröfsen $\ddot{p}_\varrho$ und $P_\varkappa$ als eindeutige Funktionen der p_ϱ und der $\dot{p}_\varrho$ bestimmen.

Anmerkung. Indem wir Gebrauch machen von der Beziehung **277**, können wir die Bewegungsgleichungen **371a** in der Form schreiben: **372**

$$mf_\varrho + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = 0 \quad .$$

Denken wir uns die $P_\varkappa$ zuerst bestimmt, so giebt uns eine jede dieser Gleichungen die Komponente der Beschleunigung nach einer bestimmten der Koordinaten p_ϱ, ausgedrückt als Funktion der augenblicklichen Lage und Geschwindigkeit des Systems.

Folgerung 1. Drücken wir mit Hülfe der Beziehung **291a** die Komponenten der Beschleunigung durch die Energie aus, so nehmen die Bewegungsgleichungen eines freien Systems die Form an: **373**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right) - \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = 0 \quad .$$

Anmerkung 1. Die Differentialgleichungen der Bewegung in dieser Form heifsen auch die allgemeinen LAGRANGE'schen Gleichungen der Bewegung oder LAGRANGE's Gleichungen der zweiten Form (vgl. **369**). **374**

Anmerkung 2. Ist die Koordinate p_ϱ eine freie Koordinate, so kommt sie in den Bedingungsgleichungen des Systems nicht vor (**140**), die Gröfsen $p_{\varkappa\varrho}$ sind also sämtlich gleich Null, und die auf p_ϱ bezügliche Bewegungsgleichung wird: **375**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right) - \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} = 0 \quad .$$

In einem holonomen System können (**144**) stets die sämtlichen Gleichungen der Bewegung in dieser einfachen Form dargestellt werden.

376 **Folgerung 2.** Die Bewegungsgleichungen eines freien holonomen Systems in irgend welchen r freien Koordinaten p_ϱ des Systems können geschrieben werden in der Form der $2r$ Gleichungen (**289**, **375**):

a) $$q_\varrho = \frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}$$

b) $$\dot{q}_\varrho = \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} \quad ,$$

von welchen die ersteren nur Definitionen, die letzteren aber Erfahrungsthatsachen enthalten. Man kann die Bewegungsgleichungen in dieser Form auffassen als $2r$ Differentialgleichungen erster Ordnung für die $2r$ Gröfsen p_ϱ und q_ϱ, welche Gleichungen zusammen mit $2r$ Anfangswerten den Verlauf jener Gröfsen für alle Zeiten bestimmen.

377 **Anmerkung 1.** Die Gleichungen **376 a** und **b** würde man wohl mit Recht als die Poisson'sche Form der Bewegungsgleichungen bezeichnen.

378 **Anmerkung 2.** Aus den Gleichungen **376** folgen zwei reciproke Beziehungen, welche analytisch dargestellt sind durch die Gleichungen:

a) $$\frac{\partial_p \dot{q}_\varrho}{\partial p_\sigma} = \frac{\partial_p \dot{q}_\sigma}{\partial p_\varrho} \qquad \text{(aus b))}$$

b) $$\frac{\partial_p q_\varrho}{\partial p_\sigma} = \frac{\partial_p \dot{q}_\sigma}{\partial \dot{p}_\varrho} \quad , \qquad \text{(aus a) und b))}$$

und welche einen einfachen physikalischen Sinn besitzen. Beide Beziehungen enthalten Elemente der Erfahrung und würden nicht für jede mögliche Bewegung des Systems gelten, können also auch unter Umständen zur Prüfung des Grundgesetzes verwertet werden. Eine dritte analoge, allein aus **376a** abgeleitete Beziehung würde nur die Folge unserer Definitionen sein.

Folgerung 3. Die Bewegungsgleichungen eines freien holonomen Systems in irgend welchen r freien Koordinaten p_ϱ des Systems können geschrieben werden in der Form der $2r$ Gleichungen (**290, 289, 292, 375**): 379

$$\dot{p}_\varrho = \frac{\partial_q E}{\partial q_\varrho} \qquad \text{a)}$$

$$\dot{q}_\varrho = -\frac{\partial_q E}{\partial p_\varrho}\,, \qquad \text{b)}$$

von welchen die ersteren nur Definitionen, die letzteren aber Erfahrungsthatsachen enthalten. Auch in dieser Form erscheinen die Bewegungsgleichungen als $2r$ Differentialgleichungen erster Ordnung für die $2r$ Gröfsen p_ϱ und q_ϱ, welche Gleichungen zusammen mit $2r$ Anfangswerten den Verlauf jener Gröfsen für alle Zeiten bestimmen.

Anmerkung 1. Die vorstehenden Gleichungen **379a** und **b** 380
werden gewöhnlich als die Hamilton'sche Form der Bewegungsgleichungen für ein freies System bezeichnet.

Anmerkung 2. Aus den Gleichungen **379** folgen zwei reci- 381
proke Beziehungen, welche analytisch dargestellt sind durch die Gleichungen:

$$\frac{\partial_q \dot{q}_\varrho}{\partial p_\sigma} = \frac{\partial_q \dot{q}_\sigma}{\partial p_\varrho} \qquad \text{a)}$$

$$\frac{\partial_q \dot{p}_\varrho}{\partial p_\sigma} = -\frac{\partial_q \dot{q}_\sigma}{\partial q_\varrho}\,, \qquad \text{b)}$$

und welche eine einfache physikalische Bedeutung besitzen. Beide Beziehungen enthalten Elemente der Erfahrung und zeichnen die natürliche Bewegung vor andern möglichen Bewegungen aus, können also auch unter Umständen rückwärts zur Prüfung des Grundgesetzes verwertet werden. Eine dritte analoge, allein aus **379a** abzuleitende Beziehung würde nur die Folge unserer Definitionen sein, also keine mechanische Bedeutung besitzen.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dafs die Gleichungen **378a** und **381a** verschiedene Aussagen darstellen und nicht etwa dieselben Aussagen in verschiedener Form.

Innerer Zwang der Systeme.

382 **Lehrsatz.** Ein System materieller Punkte, zwischen welchen keine Zusammenhänge bestehen, beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung längs einer geraden Bahn.

Denn für ein solches System ist die gerade Bahn zugleich die geradeste.

383 **Folgerung 1.** Ein freier materieller Punkt beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung in einer geraden Bahn (GALILEI's Trägheitsgesetz oder NEWTON's Lex prima).

384 **Folgerung 2.** Die Beschleunigung eines Systems materieller Punkte, zwischen welchen keine Zusammenhänge bestehen, ist Null. Die Zusammenhänge zwischen den Punkten eines materiellen Systems können also als die Ursache aufgefafst werden, aus welcher die Beschleunigung im allgemeinen von Null abweicht.

385 **Definition.** Die Abänderung, welche die sämtlichen Zusammenhänge eines materiellen Systems an seiner Beschleunigung hervorrufen, heifst der Zwang, welchen die Zusammenhänge dem System auferlegen; jene Abänderung wird auch kurz der innere Zwang oder noch kürzer der Zwang des Systems genannt.

Der Zwang wird gemessen durch den Unterschied zwischen der wirklichen Beschleunigung des Systems und der Beschleunigung derjenigen natürlichen Bewegung, welche bei Aufhebung sämtlicher Bedingungsgleichungen des Systems eintreten würde; er ist gleich der ersteren vermindert um die letztere.

386 **Folgerung 1.** Der innere Zwang eines Systems ist wie die Beschleunigung eine Vektorgröfse in Bezug auf das System.

Folgerung 2. In einem freien System ist der innere Zwang gleich der Beschleunigung des Systems; er ist hier in der That nur eine andere Auffassung der Beschleunigung (**382**). 387

Lehrsatz 1. Die Gröfse des Zwanges ist in jedem Augenblick für die natürliche Bewegung eines freien Systems kleiner als für irgend eine andere mögliche Bewegung, welche in dem betrachteten Augenblick nach Lage und Geschwindigkeit mit jener zusammenfällt. 388

Denn diese Behauptung ist nach **387** nur im Ausdruck verschieden von dem Lehrsatz **344**.

Folgerung. Ein jeder Zusammenhang, welcher den vorhandenen Zusammenhängen des Systems hinzugefügt wird, vergröfsert den Zwang des Systems. Die Auflösung irgend eines Zusammenhanges ändert die natürliche Bewegung in solcher Weise, dafs sich der Zwang verkleinert. 389

Anmerkung 1. Der vorstehende Lehrsatz entspricht dem Gauss'schen Prinzip des kleinsten Zwanges. Um sein Verhältnis zu diesem Prinzipe genau darzustellen, würden wir uns derselben Ausdrucksweise zu bedienen haben wie in **350**. 390

Anmerkung 2. Das Gauss'sche Prinzip und das Trägheitsgesetz (**383**) zusammen können das Grundgesetz vollständig ersetzen, und zwar für alle Systeme. 391

Denn sie sagen zusammen den Lehrsatz **344** aus.

Lehrsatz 2. Die Richtung des Zwanges steht bei der natürlichen Bewegung eines freien Systems beständig senkrecht auf jeder möglichen oder virtuellen (**111**) Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage. 392

Denn die Komponenten des Zwanges nach den Koordinaten p_ϱ sind nach **387** in einem freien System gleich f_ϱ, können also nach **372** geschrieben werden in der Form:

$$-\frac{1}{m}\sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa \quad ,$$

sind also nach **250** senkrecht auf jeder möglichen Verrückung des Systems.

393 **Symbolischer Ausdruck.** Bezeichnen die δp_ϱ die Änderungen der Koordinaten p_ϱ für irgend eine beliebige mögliche oder virtuelle Verrückung des Systems, so giebt die Gleichung:

a)
$$\sum_1^r{}_\varrho f_\varrho \delta p_\varrho = 0$$

einen symbolischen Ausdruck des vorigen Lehrsatzes. Denn die Gleichung ersetzt den Lehrsatz nach **249**, und sie ist symbolisch, insofern sie als Symbol für unendlich viele Gleichungen steht.

Wenden wir rechtwinklige Koordinaten an, und bezeichnet δx_ν die Änderung von x_ν für irgend eine mögliche oder virtuelle Verrückung, so nimmt die Gleichung **a)** die Gestalt an:

b)
$$\sum_1^{3n}{}_\nu m_\nu \ddot{x}_\nu \delta x_\nu = 0 \quad .$$

394 **Anmerkung 1.** Der vorstehende Lehrsatz **392** entspricht dem D'ALEMBERT'schen Prinzip; die Gleichungen **393a** und **b** entsprechen der gewöhnlichen Darstellungsweise desselben. Um das Verhältnis zwischen diesem Prinzip und jenem Lehrsatz genau festzustellen, würden wir uns derselben Ausdrucksweise zu bedienen haben wie in **350**.

395 **Anmerkung 2.** Aus der Bedingung, dafs der Zwang senkrecht stehe auf jeder virtuellen Verrückung des Systems, folgen nach **250** die Bewegungsgleichungen des freien Systems in der Form **372**. Das D'ALEMBERT'sche Prinzip kann also für sich allein das Grundgesetz vertreten und zwar für alle Systeme. Das von uns benutzte Grundgesetz hat vor jenem Prinzip die einfachere und durchsichtigere Bedeutung voraus.

396 **Folgerung 1.** In einem freien System steht die Beschleunigung beständig senkrecht auf jeder möglichen Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage.

397 **Folgerung 2.** Bei der Bewegung eines freien Systems steht die Beschleunigung beständig senkrecht auf der Richtung der wirklichen augenblicklichen Bewegung.

Folgerung 3. Bei der Bewegung eines freien Systems ist die Komponente der Beschleunigung in jeder Richtung einer möglichen Bewegung beständig gleich Null. 398

Folgerung 4. Die Komponente der Beschleunigung eines freien Systems in der Richtung irgend einer freien Koordinate des Systems ist beständig gleich Null. 399

Lehrsatz. Ein freies System bewegt sich in solcher Weise, dafs die Komponenten der Beschleunigung in Richtung einer jeden Koordinate der absoluten Lage beständig Null bleibt, welches auch immer der innere Zusammenhang zwischen den Punkten des Systems ist. 400

Denn welches auch der Zusammenhang des Systems ist, jede Koordinate seiner absoluten Lage ist eine freie Koordinate (142).

Folgerung. Wählen wir die Koordinaten eines freien Systems übrigens beliebig, aber doch so, dafs sich unter ihnen sechs Koordinaten der absoluten Lage finden (19), so können wir auch ohne Kenntnis des Zusammenhanges des Systems, oder ohne vollständige Kenntnis desselben, doch stets sechs Differentialgleichungen der Bewegung des Systems angeben. 401

Besondere Wahl der Koordinaten. Die folgende Wahl von Koordinaten der absoluten Lage ist für jedes System eine zulässige Wahl. 402

Wir bezeichnen mit

$$\alpha_1\;,\quad \alpha_2\;,\quad \alpha_3$$

die arithmetischen Mittelwerte derjenigen rechtwinkligen Koordinaten aller Massenteilchen, welche beziehlich mit $x_1\, x_2\, x_3$ parallel sind. Die Gröfsen $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3$ betrachten wir als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes von mittlerer Lage, welchen wir den Schwerpunkt des Systems nennen. Durch den Schwerpunkt legen wir drei Gerade parallel den drei Koordinatenaxen; durch diese drei Geraden und alle Massenteilchen legen wir Ebenen, und bezeichnen mit

$$\omega_1\;,\quad \omega_2\;,\quad \omega_3$$

die arithmetischen Mittelwerte der Winkel aller durch dieselbe Gerade gelegten Ebenen mit einer beliebigen unter ihnen. Die sechs Gröfsen α und ω sind von einander unabhängig veränderliche Gröfsen, deren Änderung notwendig eine Änderung in der Lage des Systems bedingt, und welche durch die Konfiguration allein nicht bestimmt sind. Wir können also diese sechs Gröfsen zu Koordinaten der absoluten Lage machen (21), und wir machen sie zu Koordinaten der absoluten Lage, sobald wir neben ihnen nur noch Konfigurationskoordinaten als weitere Koordinaten einführen.

Erteilen wir den α und ω beliebige Veränderungen, während wir die übrigen Koordinaten festhalten, so bewegt sich das System wie ein starrer Körper. Wir erhalten daher aus rein geometrischen Gründen für die Änderungen der rechtwinkligen Koordinaten, wenn wir den Index ν von 1 bis n laufen lassen (13):

$$\text{a)}\quad \left\{\begin{aligned} dx_{3\nu} &= d\alpha_1 + (x_{3\nu-1}-\alpha_2)\,d\omega_3 - (x_{3\nu-2}-\alpha_3)\,d\omega_2 \\ dx_{3\nu-1} &= d\alpha_2 + (x_{3\nu-2}-\alpha_3)\,d\omega_1 - (x_{3\nu}-\alpha_1)\,d\omega_3 \\ dx_{3\nu-2} &= d\alpha_3 + (x_{3\nu}-\alpha_1)\,d\omega_2 - (x_{3\nu-1}-\alpha_2)\,d\omega_1 \quad . \end{aligned}\right.$$

Hieraus ergeben sich, wenn wir auch nun die x_ν als Funktionen sämtlicher Koordinaten betrachten, die Werte der partiellen Differentialquotienten der x_ν nach den α und ω; also zum Beispiel:

$$\text{b)}\qquad \frac{\partial x_{3\nu}}{\partial \alpha_1} = 1 \quad , \quad \frac{\partial x_{3\nu}}{\partial \alpha_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial x_{3\nu}}{\partial \alpha_3} = 0 \quad ,$$

$$\text{c)}\quad \frac{\partial x_{3\nu}}{\partial \omega_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial x_{3\nu}}{\partial \omega_2} = -\,(x_{3\nu-2}-\alpha_3) \quad , \quad \frac{\partial x_{3\nu}}{\partial \omega_3} = x_{3\nu-1}-\alpha_2 \quad .$$

403 **Folgerung 1.** Zufolge der Bemerkung, dafs die Beschleunigungen des Systems nach den Koordinaten $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ verschwinden müssen (400), gelten die drei Gleichungen:

$$\sum_1^n{}_\nu\, m_\nu \ddot{x}_{3\nu} = 0 \quad , \quad \sum_1^n{}_\nu\, m_\nu \ddot{x}_{3\nu-1} = 0 \quad , \quad \sum_1^n{}_\nu\, m_\nu \ddot{x}_{3\nu-2} = 0 \quad .$$

Denn nach **242** und **275** ist die Beschleunigung nach der Koordinate α_1 des Schwerpunktes gleich:

$$\sum_1^{3n} {}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial \alpha_1} \frac{m_\nu}{m} \ddot{x}_\nu \quad ,$$

also nach **402b** gleich:

$$\sum_1^{n} {}_\nu \frac{m_\nu}{m} \ddot{x}_{3\nu} \quad ,$$

und entsprechende Ausdrücke gelten für die Beschleunigungen nach α_2 und α_3.

Anmerkung. Die drei Gleichungen **403**, welche sich unmittelbar zweimal integrieren lassen und dann aussagen, dafs der Schwerpunkt eines freien Systems sich in gleichförmiger, geradliniger Bewegung befindet, enthalten das sogenannte Prinzip des Schwerpunktes. **404**

Folgerung 2. Zufolge der Bemerkung, dafs die Beschleunigungen des Systems nach den Koordinaten $\omega_1 \, \omega_2 \, \omega_3$ verschwinden müssen (**400**), gelten die drei Gleichungen: **405**

$$\sum_1^{n} {}_\nu \, m_\nu \left(x_{3\nu-2} \, \ddot{x}_{3\nu-1} - x_{3\nu-1} \, \ddot{x}_{3\nu-2} \right) = 0 \quad ,$$

$$\sum_1^{n} {}_\nu \, m_\nu \left(x_{3\nu} \quad \ddot{x}_{3\nu-2} - x_{3\nu-2} \, \ddot{x}_{3\nu} \quad \right) = 0 \quad ,$$

$$\sum_1^{n} {}_\nu \, m_\nu \left(x_{3\nu-1} \, \ddot{x}_{3\nu} \quad - x_{3\nu} \quad \ddot{x}_{3\nu-1} \right) = 0 \quad .$$

Denn nach **242** und **275** ist die Beschleunigung nach ω_1 gleich:

$$\sum_1^{3n} {}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial \omega_1} \cdot \frac{m_\nu}{m} \ddot{x}_\nu \quad ,$$

also nach **402c** gleich:

$$\sum_1^n{}_\nu \frac{m_\nu}{m} \left\{ (x_{3\nu-2}-\alpha_3)\,\ddot{x}_{3\nu-1} - (x_{3\nu-1}-\alpha_2)\,\ddot{x}_{3\nu-2} \right\} \quad ,$$

also durch Benutzung von **403** gleich:

$$\sum_1^n{}_\nu \frac{m_\nu}{m} \left(x_{3\nu-2}\,\ddot{x}_{3\nu-1} - x_{3\nu-1}\,\ddot{x}_{3\nu-2} \right) \quad ,$$

und entsprechende Werte gelten für die Beschleunigungen nach ω_2 und ω_3.

406 **Anmerkung.** Die drei Gleichungen **405** enthalten das sogenannte Prinzip der Flächen. Jene Gleichungen lassen sich nämlich unmittelbar einmal integrieren und ergeben dann die Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\sum_1^n{}_\nu m_\nu \left(x_{3\nu-2}\,\dot{x}_{3\nu-1} - x_{3\nu-1}\,\dot{x}_{3\nu-2} \right) = \text{const}_1 \quad ,$$

$$\sum_1^n{}_\nu m_\nu \left(x_{3\nu}\,\dot{x}_{3\nu-2} - x_{3\nu-2}\,\dot{x}_{3\nu} \right) = \text{const}_2 \quad ,$$

$$\sum_1^n{}_\nu m_\nu \left(x_{3\nu-1}\,\dot{x}_{3\nu} - x_{3\nu}\,\dot{x}_{3\nu-1} \right) = \text{const}_3 \quad ,$$

welche die folgende, den Namen rechtfertigende geometrische Deutung erlauben:

Ziehen wir vom Ursprung der Koordinaten nach jedem Massenteilchen des Systems einen Radius, so wächst die Summe der Projektionen der von diesen Radien beschriebenen Flächen auf jede der drei Koordinatenebenen gleichförmig mit der Zeit.

407 **Anmerkung 1 zu 402 bis 406.** Wir haben die Prinzipien des Schwerpunktes und der Flächen als besondere Fälle des allgemeinen Lehrsatzes **400** eingeführt. Wir hätten hierzu kein Recht gehabt, wenn man, wie es bisweilen geschieht, als den wesentlichen Inhalt jener Prinzipien den Vorteil ansehen wollte, dafs sie Integrale der Bewegungsgleichungen liefern. Diese Auffassung scheint uns aber schon deshalb unzulässig,

weil das Ergebnis des Flächensatzes doch nur in uneigentlichem Sinne ein Integral genannt werden kann. Als wesentlichen Inhalt jener Prinzipien betrachten wir vielmehr, wie uns scheint mit Recht, den Vorteil, dafs sie Behauptungen liefern, welche unabhängig von dem besonderen Zusammenhang des Systems allgemeingültig ausgesagt werden können.

Anmerkung 2 zu 402 bis 406. Bei der Ableitung des Satzes 408
vom Schwerpunkt und des Flächensatzes als besonderer Fälle des Satzes **400** haben wir nicht von allen Eigenschaften Gebrauch gemacht, welche wir den α und den ω durch die Definition beilegten. In der That hätten wir jene Sätze auch mit Benutzung anderer Koordinaten ableiten können, z. B. aller Koordinaten, welche mit den α und ω gleiche Richtung haben, ohne doch identisch mit ihnen zu sein. Überhaupt würden wir bei beliebiger Wahl der Koordinaten nicht jedesmal 6 Gleichungen erhalten, welche einen neuen physikalischen Sinn ergäben oder von den Gleichungen **403** und **405** völlig unabhängig wären, sondern es würden stets diejenigen Gleichungen sein, welche aus den Gleichungen **403** und **405** durch Transformation auf die gewählten Koordinaten entstehen. Aber für alle diese verschiedenen Formen giebt der Lehrsatz **400** einen gemeinschaftlichen Ausdruck und den physikalischen Sinn.

Holonome Systeme.

Bemerkung. Ist für ein holonomes System die geradeste 409
Entfernung (217) bekannt, so lassen sich die Gleichungen der geradesten Bahnen in endlicher Form darstellen (225). Diese Bahnen sind aber die natürlichen Bahnen des Systems, sobald dasselbe frei ist, und alle Bewegungen, bei welchen sie mit gleichbleibender Geschwindigkeit durchlaufen werden, sind natürliche Bewegungen des Systems. Die Bewegungsgleichungen eines freien holonomen Systems werden sich also in endlicher Form darstellen lassen.

Aufgabe. Die Bewegungsgleichungen eines freien holo- 410
nomen Systems mit Hülfe der geradesten Entfernung desselben darzustellen.

(410) Es sei wie früher S die geradeste Entfernung des Systems, gedacht als Funktion der freien Koordinaten p_{ϱ_0} und p_{ϱ_1} ihrer Anfangs- und Endlage. Es sei t_0 die Zeit, zu welcher das System die Anfangslage, t_1 die Zeit, zu welcher es die Endlage durchläuft. Es ist dann $t_1 - t_0$ die Dauer des Übergangs, also

a) $$v = \frac{S}{t_1 - t_0}$$

die konstante Geschwindigkeit des Systems in seiner Bahn, also seine Energie:

b) $$E = \frac{1}{2} m \frac{S^2}{(t_1 - t_0)^2} \quad ,$$

und seine Momente q_{ϱ_0} und q_{ϱ_1} zu den Zeiten t_0 und t_1:

c) $$q_{\varrho_0} = m \frac{S}{t_1 - t_0} \sqrt{a_{\varrho\varrho_0}} \cos s, p_{\varrho_0}$$
$$q_{\varrho_1} = m \frac{S}{t_1 - t_0} \sqrt{a_{\varrho\varrho_1}} \cos s, p_{\varrho_1} \quad .$$

Für die Gleichungen der geradesten Bahnen finden wir zwei Formen in den Gleichungen **224a** und **226a**. Multiplizieren wir dieselben mit $mS/(t_1 - t_0)$ oder, was nach **b)** dasselbe ist, mit $\sqrt{2mE}$, so erhalten wir die folgenden vier Sätze von je r Gleichungen:

d) $$q_{\varrho_1} = \frac{1}{2} \frac{m}{t_1 - t_0} \frac{\partial S^2}{\partial p_{\varrho_1}}$$

e) $$q_{\varrho_0} = -\frac{1}{2} \frac{m}{t_1 - t_0} \frac{\partial S^2}{\partial p_{\varrho_0}}$$

f) $$q_{\varrho_1} = \sqrt{2mE} \frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_1}}$$

g) $$q_{\varrho_0} = -\sqrt{2mE} \frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_0}} \quad .$$

Damit ist unsere Aufgabe gelöst und zwar in mehrfacher Weise.

Denn betrachten wir t_1 als die variabele Zeit, und also die p_{ϱ_1} als die Koordinaten der mit dieser Zeit sich verändernden Lage, so bestimmen uns die r Gleichungen e) diese r Koordinaten als endliche Funktionen von t_1, und das Gleiche leisten uns die Gleichungen g), wenn wir zu diesen noch die Beziehung zwischen E und t_1, also die Gleichung b) hinzunehmen. Die $2r$ Gröfsen p_{ϱ_0} und q_{ϱ_0} spielen dabei die Rolle der $2r$ willkürlichen Konstanten. Bei der gleichen Betrachtungsweise geben uns nebenbei auch die Gleichungen d), oder f) und b), die Bewegungsgleichungen des Systems, und zwar nunmehr als Differentialgleichungen erster Ordnung, in welchen die r Gröfsen p_{ϱ_0} die Rolle der r willkürlichen Konstanten übernehmen.

Oder betrachten wir, was nicht minder erlaubt, die Zeit t_0 als die variabele Zeit, also die Lage 0 als die variabele Lage, so geben uns die Gleichungen d), oder auch f) und b), die Bewegungsgleichungen in endlicher Form, mit der Zeit t_0 als unabhängiger, den p_{ϱ_0} als abhängigen Variabelen und den p_{ϱ_1} und q_{ϱ_1} als $2r$ willkürlichen Konstanten. Zugleich geben uns dann nebenbei die Gleichungen e), oder auch g) und b), die Bewegungsgleichungen in der Gestalt von Differentialgleichungen erster Ordnung, in welchen die p_{ϱ_1} die Rolle von r willkürlichen Konstanten spielen.

Folgerung 1. Setzen wir 411

$$\sqrt{2Em}\,.\,S = V \quad , \qquad \text{a)}$$

und betrachten V als Funktion der p_{ϱ_0}, p_{ϱ_1} und von E, so lassen sich die natürlichen Bewegungen des Systems darstellen in der Form:

$$q_{\varrho_1} = \frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_1}} \qquad \text{b)}$$

$$q_{\varrho_0} = -\frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_0}} \qquad \text{c)}$$

$$t_1 - t_0 = \frac{\partial V}{\partial E} \quad . \qquad \text{d)}$$

Denn die Gleichungen **b)** und **c)** fallen zusammen mit den Gleichungen **410f** und **g**, und die Gleichung **d)** folgt aus Gleichung **a)** und **410b**.

412 **Anmerkung.** Die so eingeführte Funktion V ist HAMILTON's charakteristische Funktion des Systems; sie ist bei HAMILTON mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet. Eine solche Funktion besteht also nur für holonome Systeme. Ihrer mechanischen Bedeutung nach giebt die charakteristische Funktion den doppelten Wert des Zeitintegrals der Energie an, welcher eintritt, wenn das System mit gegebener Energie aus gegebener Anfangs- in gegebene Endlage übergeht, gedacht als Funktion jener Energie und der Koordinaten der Anfangs- und der Endlage.

Denn es ist nach Gleichung **411a** und **410b**:

$$V = 2E(t_1 - t_0)$$

dem Werte nach, der Form nach allerdings nur dann, wenn wir in der rechten Seite die Dauer des Übergangs $t_1 - t_0$ als Funktion von E und den p_{ϱ_1} und p_{ϱ_0} dargestellt denken.

413 **Lehrsatz.** Die charakteristische Funktion V eines freien holonomen Systems genügt den beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{1}{2m} \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \, b_{\varrho\sigma_1} \frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_1}} \frac{\partial V}{\partial p_{\sigma_1}} = E$$

$$\frac{1}{2m} \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \, b_{\varrho\sigma_0} \frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_0}} \frac{\partial V}{\partial p_{\sigma_0}} = E \quad .$$

Denn dieselben werden erhalten durch Multiplikation der Gleichungen 227 für die geradeste Entfernung mit $2mE$ und Beachtung der Gleichung **411a**.

414 **Folgerung 2.** Setzen wir

a) $$\frac{m S^2}{2(t_1 - t_0)} = P \quad ,$$

und betrachten P als Funktion der $p_{\varrho_0}, p_{\varrho_1}$ und von t_0 und t_1, so stellen die Gleichungen:

$$q_{\varrho_1} = \frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_1}} \qquad \textbf{b)}$$

$$q_{\varrho_0} = -\frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_0}} \qquad \textbf{c)}$$

die natürlichen Bewegungen des Systems dar. Die Energie E des Systems kann aus P unmittelbar abgeleitet werden mit Hülfe der Gleichungen:

$$E = -\frac{\partial P}{\partial t_1} = \frac{\partial P}{\partial t_0} \quad . \qquad \textbf{d)}$$

Denn die Gleichungen **b)** und **c)** fallen zusammen mit den Gleichungen **410d** und **e**, und die Gleichungen **d)** folgen aus Gleichung **a)** und **410b**.

Anmerkung. Die jetzt eingeführte Funktion P ist die **415**
Hamilton'sche Prinzipalfunktion des Systems; sie ist bei Hamilton selbst mit S bezeichnet. Nur für holonome Systeme besteht eine solche Funktion. Ihrer mechanischen Bedeutung nach giebt die Prinzipalfunktion den Wert des Zeitintegrals der Energie an, welcher eintritt, wenn das System in gegebener Zeit aus gegebener Anfangs- in gegebene Endlage übergeht, gedacht als Funktion jener Zeit und der Anfangs- und Endwerte der Koordinaten.

Denn es ist nach Gleichungen **414a** und **410b**:

$$P = E(t_1 - t_0)$$

dem Werte nach, der Form nach allerdings nur dann, wenn wir uns in der rechten Seite E als Funktion der $p_{\varrho_1}, p_{\varrho_0}$ und der t_1 und t_0 dargestellt denken.

Lehrsatz. Die Prinzipalfunktion eines freien holonomen **416**
Systems genügt den beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{1}{2m}\sum_1^r{}_\varrho\sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma_1}\frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_1}}\frac{\partial P}{\partial p_{\sigma_1}} = -\frac{\partial P}{\partial t_1}$$

$$\frac{1}{2m}\sum_1^r{}_\varrho\sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma_0}\frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_0}}\frac{\partial P}{\partial p_{\sigma_0}} = \frac{\partial P}{\partial t_0}\quad .$$

Denn dieselben werden erhalten, indem man die Gleichungen **227** multipliziert mit (**410b**)

$$\frac{m\,S^2}{2(t_1-t_0)^2} = E$$

und die Beziehungen **414a** und **d** beachtet.

417 **Anmerkung zu 411 bis 416.** Ebenso wie wir in **232** bis **236** von den Differentialgleichungen **227** ausgehend Funktionen betrachten konnten, welche der geradesten Entfernung verwandt waren und sie in analytischer Hinsicht vollkommen ersetzten, ohne doch eine gleich einfache geometrische Bedeutung wie sie zu haben, ebenso können wir von den Differentialgleichungen **413** und **416** ausgehend zu Funktionen gelangen, welche der charakteristischen Funktion und der Prinzipalfunktion verwandt sind und in analytischer Hinsicht gleiche Dienste leisten oder selbst Vorteile bieten, deren Bedeutung in physikalischer Hinsicht aber durch die mathematische Verwickelung mehr und mehr verdunkelt erscheint. Solche Funktionen würde man passend als Jacobi'sche Prinzipalfunktionen und charakteristische Funktionen bezeichnen.

Es erhellt übrigens, daſs auch schon in der charakteristischen Funktion und in der Prinzipalfunktion nur der einfache Sinn der geradesten Entfernung und auch dieser in leichter Verschleierung auftritt, so daſs die Einführung jener Funktionen neben einander und neben der geradesten Entfernung nur eine geringe Bedeutung haben würde, wenn es sich stets, wie hier, um die Betrachtung vollständig bekannter freier Systeme handelte.

Dynamische Modelle.

Definition. Ein materielles System heifst dynamisches 418
Modell eines zweiten Systems, wenn sich die Zusammenhänge des ersteren durch solche Koordinaten darstellen lassen, dafs den Bedingungen genügt ist:

1. dafs die Zahl der Koordinaten des ersten Systems gleich der Zahl der Koordinaten des andern Systems ist,
2. dafs nach passender Zuordnung der Koordinaten für beide Systeme die gleichen Bedingungsgleichungen bestehen,
3. dafs der Ausdruck für die Gröfse einer Verrückung in beiden Systemen bei jener Zuordnung der Koordinaten übereinstimme.

Je zwei einander zugeordnete Koordinaten beider Systeme heifsen auch korrespondierende. Korrespondierende Lagen, Verrückungen, u.s.w. heifsen solche Lagen, Verrückungen, u. s.w. beider Systeme, welchen gleiche Werte der korrespondierenden Koordinaten und ihrer Änderungen zugehören.

Folgerung 1. Ist ein System Modell eines zweiten Sy- 419
stems, so ist auch umgekehrt das zweite System Modell des ersten. Sind zwei Systeme Modelle eines dritten, so sind sie auch Modelle von einander. Das Modell des Modells eines Systems ist auch Modell des ursprünglichen Systems.

Alle Systeme, welche Modelle von einander sind, heifsen auch dynamisch ähnlich.

Folgerung 2. Die Eigenschaft eines Systems, Modell 420
eines andern zu sein, ist unabhängig von der Wahl der Koordinaten des einen oder des andern Systems, obwohl sie erst bei besonderer Wahl der Koordinaten unmittelbar hervortritt.

Folgerung 3. Ein System ist noch nicht vollständig be- 421
stimmt dadurch, dafs es Modell eines gegebenen Systems ist. Unendlich viele, physikalisch gänzlich verschiedene Systeme können Modelle eines und desselben Systems sein. Ein System ist Modell unendlich vieler, gänzlich verschiedener Systeme.

Denn die Koordinaten der Massen der beiden Systeme, welche Modelle von einander sind, können der Zahl nach

gänzlich verschieden und gänzlich verschiedene Funktionen der korrespondierenden Koordinaten sein.

422 **Folgerung 4.** Modelle holonomer Systeme sind wieder holonome Systeme. Modelle nicht holonomer Systeme sind wieder nicht holonome Systeme.

423 **Anmerkung.** Damit ein holonomes System Modell eines andern sei, genügt es, daſs sich solche freie Koordinaten beider angeben lassen, in welchen der Ausdruck für die Gröſse der Verrückung beider Systeme der gleiche wird.

424 **Lehrsatz.** Haben zwei Modelle von einander korrespondierende Zustände zu einer bestimmten Zeit, so haben sie korrespondierende Zustände zu allen Zeiten.

Denn durch die Bedingungsgleichungen eines Systems, den Ausdruck für die Gröſse der Verrückung (**164**) und durch die Anfangswerte der Koordinaten und ihrer Veränderung (**332**) ist der Verlauf dieser Koordinaten für alle Zeiten bestimmt, welche Funktion dieser Koordinaten auch immer die Lage der Massen des Systems ist.

425 **Folgerung 1.** Um den Ablauf der natürlichen Bewegung eines materiellen Systems vorauszusehen, genügt die Kenntnis eines Modells jenes Systems. Das Modell kann unter Umständen viel einfacher sein, als das System, dessen Bewegungen es darstellt.

426 **Folgerung 2.** Sind von einer Anzahl materieller Systeme, welche Modelle von einander sind, dieselben Gröſsen korrespondierende Koordinaten, und sind nur diese korrespondierenden Koordinaten der Beobachtung zugänglich, so sind alle diese Systeme in Hinsicht der beschränkten Beobachtung nicht von einander verschieden, sondern erscheinen als gleiche Systeme, wie verschieden auch in Wahrheit in ihnen Zahl und Zusammenhang der materiellen Punkte sein möge.

Es ist daher auch unmöglich, allein aus der Beobachtung der natürlichen Bewegungen eines freien materiellen Systems, d. h. ohne direkte Bestimmung seiner Massen (**300**), den Zusammenhang des Systems weiter zu erkennen, als soweit, daſs man ein Modell des Systems angeben könne.

Anmerkung 1. Lassen wir allgemein und ohne Einschränkung zu, dafs aufser den unmittelbar, d. h. den mit der Wage bestimmbaren Massen noch andere, hypothetische Massen (301) in den Systemen der Natur sich finden können, so ist es überhaupt unmöglich, in der Erkenntnis des Zusammenhanges natürlicher Systeme weiter zu gelangen, als soweit, dafs man Modelle der wirklichen Systeme angeben könne. Wir können dann in der That keine Kenntnis haben, ob die Systeme, welche wir in der Mechanik betrachten, mit den wirklichen Systemen der Natur, welche wir zu betrachten meinen, in irgend etwas anderem übereinstimmen, als allein darin, dafs die einen Modelle der anderen sind. 427

Anmerkung 2. Das Verhältnis eines dynamischen Modells zu dem System, als dessen Modell es betrachtet wird, ist dasselbe, wie das Verhältnis der Bilder, welche sich unser Geist von den Dingen bildet, zu diesen Dingen. Betrachten wir nämlich den Zustand des Modells als eine Abbildung des Zustandes des Systems, so sind die Folgen der Abbildung, welche nach den Gesetzen dieser Abbildung eintreten müssen, zugleich die Abbildung der Folgen, welche sich an dem ursprünglichen Gegenstand nach den Gesetzen dieses ursprünglichen Gegenstandes entwickeln müssen. Die Übereinstimmung zwischen Geist und Natur läfst sich also vergleichen mit der Übereinstimmung zwischen zwei Systemen, welche Modelle von einander sind, und wir können uns sogar Rechenschaft ablegen von jener Übereinstimmung, wenn wir annehmen wollen, dafs der Geist die Fähigkeit habe, wirkliche dynamische Modelle der Dinge zu bilden und mit ihnen zu arbeiten. 428

Abschnitt 4. Bewegung der unfreien Systeme.

Vorbemerkung 1. Nach unserer Auffassung ist jedes unfreie System Teil eines gröfseren freien Systems; unfreie Systeme, für welche diese Annahme nicht zuträfe, kennen wir nicht. Soll aber jenes Verhältnis besonders hervorgehoben 429

werden, so bezeichnen wir das unfreie System als Teilsystem, das freie System aber, von welchem es ein Teil ist, als das vollständige System.

430 **Vorbemerkung 2.** Indem wir einen Teil eines freien Systems als unfreies System behandeln, setzen wir voraus, dafs das übrige System uns mehr oder weniger unbekannt ist, so dafs die unmittelbare Anwendung des Grundgesetzes unmöglich wird. Dieser Mangel unserer Kenntnis mufs in irgend einer Weise durch besondere Angaben ausgeglichen sein. Solche Angaben können in verschiedener Weise gemacht werden. Ohne die Möglichkeiten erschöpfen zu wollen, ziehen wir nur zwei Formen für jene Angaben in Betracht, welche in der bisherigen Entwickelung der Mechanik besondere Bedeutung gewonnen haben.

Die erste Form ist diejenige, bei welcher wir die Bewegung des unfreien Systems als eine geleitete bezeichnen; die zweite ist diejenige, bei welcher wir sagen, die Bewegung des unfreien Systems sei durch Kräfte beeinflufst.

I. Geleitetes unfreies System.

431 **Definition.** Geleitete Bewegung eines unfreien Systems heifst jede Bewegung, welche das System ausführt während die übrigen Massen des vollständigen Systems eine ganz bestimmte, vorgeschriebene Bewegung ausführen. Ein System, welches geleitete Bewegungen ausführt, nennen wir ein geleitetes System.

432 **Zusatz 1.** Mögliche Bewegung eines geleiteten Systems heifst jede Bewegung desselben, welche dem Zusammenhange des vollständigen Systems und der bestimmten Bewegung der übrigen Massen desselben nicht widerspricht.

433 **Zusatz 2.** Natürliche Bewegung eines geleiteten Systems heifst jede Bewegung desselben, welche mit der bestimmten Bewegung der übrigen Massen zusammen eine natürliche Bewegung des vollständigen Systems bildet.

Aufgabe. Die möglichen Bewegungen eines geleiteten Systems analytisch darzustellen. 434

Seien die r Gröfsen p_ϱ allgemeine Koordinaten des betrachteten Teilsystems, die $\mathfrak{r}$ Gröfsen $\mathfrak{p}_\varrho$ irgendwelche Koordinaten der übrigen Massen des vollständigen Systems. Die $r+\mathfrak{r}$ Gröfsen p_ϱ und $\mathfrak{p}_\varrho$ sind alsdann allgemeine Koordinaten des vollständigen Systems, und die Zusammenhänge dieses sind dargestellt durch eine Anzahl, etwa h, Gleichungen von der Form:

$$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\dot{p}_\varrho + \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho}\dot{\mathfrak{p}}_\varrho = 0 \quad , \qquad \text{a)}$$

worin die $p_{\varkappa\varrho}$ und auch die $\mathfrak{p}_{\varkappa\varrho}$ Funktionen sowohl der p_ϱ als auch der $\mathfrak{p}_\varrho$ sein können. Sind nun die Bewegungen der Massen, deren Koordinaten die $\mathfrak{p}_\varrho$ sind, bestimmt, so sind die $\mathfrak{p}_\varrho$ gegebene Funktionen der Zeit. Zum Teil sind die Gleichungen **a)** durch diese Funktionen identisch erfüllt, zum Teil nehmen sie durch Einsetzen derselben die Form der k Gleichungen an:

$$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\dot{p}_\varrho + p_{\varkappa t} = 0 \qquad \text{b)}$$

oder auch:

$$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\, dp_\varrho + p_{\varkappa t}\, dt = 0 \quad , \qquad \text{c)}$$

welche die Bedingungsgleichungen des geleiteten Systems heifsen, und in welchen die $p_{\varkappa\varrho}$ und $p_{\varkappa t}$ jetzt allein Funktionen der p_ϱ und der Zeit t sind. Alle möglichen Bewegungen des geleiteten Systems genügen diesen Gleichungen, und alle Bewegungen, welche ihnen genügen, sind mögliche Bewegungen.

Anmerkung 1. Ist das geleitete System ein holonomes System, so lassen sich die Differentialgleichungen **b)** und **c)** für dasselbe ersetzen durch ebensoviel endliche Gleichungen zwischen den r Koordinaten des Systems und der Zeit t. Die möglichen Lagen eines geleiteten holonomen Systems lassen sich darstellen durch Koordinaten, welche keinen anderen Bedingungen 435

unterworfen sind, als dieser, dafs eine Anzahl unter ihnen gegebene Funktionen der Zeit sind.

436 **Anmerkung 2.** Die Bedingungsgleichungen eines geleiteten Systems enthalten also im allgemeinen die Zeit, und das geleitete System würde für sich betrachtet der Forderung der Gesetzmäfsigkeit (119) widersprechen. Umgekehrt betrachten wir nun auch jedes System, dessen Bedingungsgleichungen nach der gewöhnlichen Redeweise der Mechanik die Zeit explicite enthalten, und welches also in unserer Redeweise anscheinend ungesetzmäfsig ist, als ein geleitetes System, als ein System also, welches zusammen mit anderen unbekannten Massen den Bedingungen der Gesetzmäfsigkeit genügt. Ist diese Annahme zulässig, so macht erst sie das Problem zu einem bestimmten mechanischen Problem (325). Ist diese Annahme aber bei einer besonderen Form der Bedingungsgleichungen etwa unzulässig, so enthalten diese Bedingungsgleichungen bereits einen Widerspruch gegen das Grundgesetz oder seine Voraussetzungen, und alle in Bezug auf das System gestellten Fragen wären keine mechanischen Probleme (326).

437 **Anmerkung 3.** Auf ein geleitetes System ist das Grundgesetz nicht unmittelbar anwendbar. Denn der Begriff der geradesten Bahnen ist nur definiert für gesetzmäfsige Zusammenhänge (120); die inneren Zusammenhänge des geleiteten Systems aber sind ungesetzmäfsige. Es müssen daher anderweitige Merkmale aufgesucht werden, durch welche die natürlichen Bewegungen eines geleiteten Systems sich von der gröfseren Mannigfaltigkeit der möglichen Bewegungen unterscheiden.

438 **Lehrsatz 1.** Wie ein freies System, so bewegt sich auch ein geleitetes System in solcher Weise, dafs die Gröfse der Beschleunigung beständig kleiner ist für die wirkliche Bewegung, als für irgend eine andere Bewegung, welche den Bedingungsgleichungen des Systems genügt, und welche in dem betrachteten Augenblick nach Lage und Geschwindigkeit mit der wirklichen zusammenfällt.

Denn das Quadrat der Gröfse der Beschleunigung des

vollständigen Systems ist gleich der Summe der entsprechenden Gröfsen für das Teilsystem und für das übrige System, diese Gröfsen multipliziert mit den Massen ihrer Systeme und dividiert durch die Masse des Gesamtsystems. Diese Summe soll nach **344** ein Minimum sein; der zweite Summand wird als bereits bestimmte und solche Funktion der Zeit vorausgesetzt, für welche das Minimum der Summe eintritt (**436**); dieses Minimum wird also dann und nur dann erzielt, wenn der erste Summand zu einem Minimum gemacht wird.

Lehrsatz 2. Wie ein freies, so bewegt sich auch ein geleitetes holonomes System in solcher Weise, dafs das Zeitintegral der Energie beim Übergang zwischen hinreichend benachbarten Lagen kleiner wird für die wirkliche Bewegung, als für irgend eine andere Bewegung, welche den Bedingungsgleichungen genügt, und welche das System in der gleichen Zeit aus der gegebenen Anfangs- in die Endlage überführt. **439**

Denn das Zeitintegral der Energie des vollständigen Systems ist gleich der Summe der entsprechenden Gröfsen für das Teilsystem und für das übrige System. Diese Summe soll nach **358** ein Minimum sein; der zweite Summand wird als bereits bestimmt und als solcher vorausgesetzt, für welchen das Minimum der Summe eintritt; dieses Minimum wird also dann und nur dann erzielt, wenn der erste Summand zu einem Minimum gemacht wird.

Anmerkung 1. Die vorstehenden beiden Lehrsätze (**438**, **439**) enthalten offenbar die Anpassung der Sätze **344** und **358** an die besonderen Voraussetzungen dieses Abschnittes. In der gewöhnlichen Ausdrucksweise der Mechanik können wir ihren Inhalt in die Form der Aussage kleiden: Der Satz von der kleinsten Beschleunigung und das HAMILTON'sche Prinzip behalten ihre Gültigkeit, auch wenn die Bedingungsgleichungen eines Systems die Zeit explicite enthalten. **440**

Anmerkung 2. Die Sätze von der Energie, vom kürzesten Wege, von der kürzesten Zeit (**340**, **347**, **352**) lassen sich nicht in gleich unmittelbarer Weise den Voraussetzungen der geleiteten Systeme anpassen. In der gewöhnlichen Ausdrucksweise der Mechanik nimmt diese Aussage die Form an: Das **441**

Prinzip der Energie und das Prinzip der kleinsten Wirkung verlieren ihre Gültigkeit, wenn die Bedingungsgleichungen eines Systems die Zeit explicite enthalten.

442 **Aufgabe**. Die Differentialgleichungen der Bewegung eines geleiteten Systems anzugeben.

Es seien wieder m die Masse, die p_ϱ die Koordinaten und die f_ϱ die Beschleunigungen nach den p_ϱ für das geleitete System. Es seien ferner $\mathfrak{m}$ die Masse und die $\mathfrak{p}_\varrho$ irgend welche Koordinaten der übrigen materiellen Punkte des vollständigen Systems. Die p_ϱ und $\mathfrak{p}_\varrho$ können auch als Koordinaten des vollständigen Systems gelten; es mögen bei dieser Auffassung die Komponenten der Beschleunigung des vollständigen Systems nach diesen Koordinaten mit f'_ϱ und $\mathfrak{f}'_\varrho$ bezeichnet werden. Dann ist die Bewegung des vollständigen Systems eindeutig bestimmt durch seine h Bedingungsgleichungen von der Form **434a** und durch $r + \mathfrak{r}$ Bewegungsgleichungen von der Form (**372**):

a)
$$(m + \mathfrak{m})\, f'_\varrho + \sum_1^h {}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, P_\varkappa = 0$$

b)
$$(m + \mathfrak{m})\, \mathfrak{f}'_\varrho + \sum_1^h {}_\varkappa\, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho}\, P_\varkappa = 0 \quad .$$

Nun haben wir nach der Voraussetzung uns die $\mathfrak{p}_\varrho$ bereits bestimmt zu denken als solche Funktionen der Zeit, durch welche die Gleichungen **b)** identisch erfüllt werden, und durch deren Einsetzen die h Bedingungsgleichungen des vollständigen Systems übergehen in die k Bedingungsgleichungen (**434b**) des geleiteten Systems. Ferner haben wir nach **255**:

c)
$$(m + \mathfrak{m})\, f'_\varrho = m f_\varrho \quad .$$

Hiernach erhalten wir als zu berücksichtigende Gleichungen die r Bewegungsgleichungen:

d)
$$m f_\varrho + \sum_1^k {}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, P_\varkappa = 0$$

und die k Bedingungsgleichungen:

$$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\dot{p}_\varrho + p_{\varkappa t} = 0 \quad , \qquad \text{e)}$$

welche $r + k$ Gleichungen nun eine Beziehung auf die unbekannten Massen des vollständigen Systems nicht mehr enthalten, welche zur eindeutigen Bestimmung der $r + k$ Gröfsen $\ddot{p}_\varrho$ und $P_\varkappa$ ausreichen, und welche daher die Lösung der gestellten Aufgabe bilden.

Folgerung 1. Die Differentialgleichungen der Bewegung 443
eines geleiteten Systems haben dieselbe Form wie diejenigen eines freien Systems.

In der gewöhnlichen Ausdrucksweise der Mechanik würden wir sagen, die Gültigkeit jener Form hänge nicht davon ab, ob die Bedingungsgleichungen des Systems die Zeit explicite enthalten oder nicht. Die Bewegungsgleichungen eines geleiteten Systems werden daher auch genau dieselben Umformungen zulassen, wie diejenigen eines freien Systems (368 ff.); diejenigen Formen allerdings, welche alle Koordinaten als freie voraussetzen, werden ihre Anwendbarkeit verlieren.

Folgerung 2. Eine natürliche Bewegung eines geleiteten 444
Systems ist eindeutig bestimmt durch Angabe der Lage und Geschwindigkeit des Systems zu einer bestimmten Zeit (vergl. 331).

Bemerkung. Wie in einem freien, so ist in einem ge- 445
leiteten System der Zwang des Systems gleich seiner Beschleunigung.

Denn wenn die sämtlichen Bedingungsgleichungen eines geleiteten Systems aufgelöst werden, so werden die materiellen Punkte des Systems freie Punkte und die Beschleunigung der natürlichen Bewegung des Systems gleich Null (385).

Lehrsatz 1. Wie in einem freien, so ist in einem ge- 446
leiteten System die Gröfse des Zwanges in jedem Augenblick kleiner für die natürliche Bewegung, als für irgend eine andere

mögliche Bewegung, welche in dem betrachteten Augenblick nach Lage und Geschwindigkeit mit jener zusammenfällt.

Der Satz folgt aus **445** und **438**.

447 **Lehrsatz 2.** Wie bei der natürlichen Bewegung eines freien Systems, so steht auch bei der natürlichen Bewegung eines geleiteten Systems die Richtung des Zwanges beständig senkrecht auf jeder möglichen oder virtuellen Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage.

Der Satz folgt aus **445** und **442** wie in **392**.

448 **Anmerkung.** Die vorstehenden beiden Sätze **446** und **447** enthalten die Anpassung der Sätze **388** und **392** an die besonderen Verhältnisse der geleiteten Systeme. In der gewöhnlichen Ausdrucksweise der Mechanik würden wir ihren Inhalt in der Fassung wiedergeben: Das Gauss'sche Prinzip des kleinsten Zwanges und das d'Alembert'sche Prinzip behalten ihre Gültigkeit, auch wenn die Bedingungsgleichungen eines Systems die Zeit explicite enthalten.

449 **Bemerkung.** Wenn die Koordinaten $\mathfrak{p}_\varrho$ des vollständigen Systems, welche in den Gleichungen **434a** mit den p_ϱ in denselben Gleichungen auftreten, nicht Funktionen der Zeit, sondern konstant in derselben sind, so nehmen die Bedingungsgleichungen des geleiteten Systems die Form an:

$$\sum_1^r {}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho} \dot{p}_\varrho = 0 \quad ,$$

worin die $p_{\varkappa\varrho}$ die Zeit nicht enthalten. Das geleitete System erscheint in diesem Falle als ein gesetzmäfsiges, aber es hört nicht notwendig auf, ein unfreies zu sein, da die $p_{\varkappa\varrho}$ Funktionen des absoluten Ortes sein können, während sie in den Bedingungsgleichungen eines freien Systems von der absoluten Lage unabhängig sind.

In solchen unfreien, aber gesetzmäfsigen Systemen behält der Begriff der geradesten Bahn seine Anwendbarkeit. Auch das Grundgesetz ist daher auf solche Systeme unmittelbar anwendbar, und es gelten daher für ein solches System auch alle Lehrsätze, welche für die Bewegung eines freien Systems auf-

gestellt wurden, mit alleiniger Ausnahme derjenigen, welche sich auf die absolute Lage beziehen, also allein mit Ausnahme des Lehrsatzes **400** und seiner Folgerungen.

II. Systeme durch Kräfte beeinflufst.

Definition. Zwei materielle Systeme heifsen direkt ge- 450
koppelt, wenn eine oder mehrere Koordinaten des einen einer oder mehreren Koordinaten des anderen dauernd gleich sind. Gekoppelt schlechthin heifsen zwei Systeme, wenn ihre Koordinaten so gewählt werden können, dafs die Systeme in das Verhältnis der direkten Koppelung treten. Gekoppelte Systeme, welche nicht direkt gekoppelt sind, heifsen indirekt gekoppelt.

Folgerung 1. Die Koppelung zweier Systeme ist eine Be- 451
ziehung zwischen beiden, welche unabhängig von unserer Willkür, insbesondere unabhängig von der Wahl der Koordinaten besteht. Ob aber eine bestehende Koppelung eine direkte oder eine indirekte sei, hängt ab von der Wahl der Koordinaten, ist also eine Frage unserer willkürlichen Auffassung.

Folgerung 2. Jede bestehende Koppelung zwischen zwei 452
Systemen kann durch geeignete Wahl der Koordinaten zu einer direkten gemacht werden. Wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist, so setzen wir im folgenden voraus, dafs dies geschehen sei. Die beständig gleichen Koordinaten der gekoppelten Systeme bezeichnen wir dann auch als ihre gemeinsamen Koordinaten.

Folgerung 3. Jedes von zwei gekoppelten Systemen ist 453
durch die Koppelung notwendig ein unfreies System, beide bilden aber zusammen oder zusammen mit weiteren Systemen, mit welchen sie gekoppelt sind, ein freies System. Wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist, so wird im folgenden angenommen, dafs eine Koppelung mit mehreren Systemen nicht stattfindet, so dafs die beiden gekoppelten Systeme zusammen bereits ein freies bilden.

Analytische Darstellung. Sind die p_ϱ die Koordinaten des 454
einen, die $\mathfrak{p}_\varrho$ die Koordinaten des andern Systems, so wird

eine Koppelung zwischen beiden Systemen dadurch hergestellt, dafs für ein oder mehrere Wertpaare von ϱ und σ p_ϱ gleich $\mathfrak{p}_\sigma$ gemacht wird. Wir können aber offenbar ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Indices so verteilen, dafs übereinstimmende Koordinaten in beiden Systemen denselben Index erhalten. Die Systeme sind dann gekoppelt, wenn für einen oder mehrere Werte von ϱ dauernd

a) $$\mathfrak{p}_\varrho - p_\varrho = 0$$

wird, von welcher Gleichung die Gleichungen

b) $$\dot{\mathfrak{p}}_\varrho - \dot{p}_\varrho = 0 \qquad \text{oder}$$

c) $$d\mathfrak{p}_\varrho - dp_\varrho = 0$$

notwendige Folgen sind.

455 **Definition.** Unter einer Kraft verstehen wir den selbständig vorgestellten Einflufs, welchen das eine von zwei gekoppelten Systemen zufolge des Grundgesetzes auf die Bewegung des anderen ausübt.

456 **Folgerung.** Zu jeder Kraft giebt es stets notwendig eine Gegenkraft.

Denn die Vorstellung des Einflusses, welchen das in der Definition als das zweite bezeichnete System auf das erste ausübt, ist nach der Definition selbst wieder eine Kraft. Kraft und Gegenkraft sind gleichberechtigt in dem Sinne, dafs nach Willkür jede von ihnen als die Kraft oder auch als die Gegenkraft aufgefafst werden kann.

457 **Aufgabe.** Einen Ausdruck für den Einflufs anzugeben, welchen das eine von zwei gekoppelten Systemen auf die Bewegung des anderen ausübt.

Es seien m die Masse und die r Gröfsen p_ϱ die Koordinaten des ersten Systems; es seien die k Gleichungen

a) $$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\dot{p}_\varrho = 0$$

wieder die Bedingungsgleichungen desselben. Es seien $\mathfrak{m}$ die (457)
Masse und die $\mathfrak{r}$ Gröfsen $\mathfrak{p}_\varrho$ die Koordinaten des zweiten Systems; es seien die $\mathfrak{k}$ Gleichungen

$$\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho \, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho} \, \dot{\mathfrak{p}}_\varrho = 0 \qquad \text{b)}$$

die Bedingungsgleichungen desselben. Es mögen ferner zwischen beiden, für einen oder mehrere, nämlich h Werte von ϱ, Koppelungsgleichungen von der Form

$$\dot{\mathfrak{p}}_\varrho - \dot{p}_\varrho = 0 \qquad \text{c)}$$

bestehen. Wir betrachten nun die Bewegung des ersten Systems unter dem Einflusse des zweiten, und behandeln es dabei als geleitetes System. Soweit die p_ϱ in den Gleichungen c) nicht vorkommen, sind die Beschleunigungen nach ihnen gegeben durch die Gleichungen (442):

$$mf_\varrho + \sum_1^k{}_\varkappa \, p_{\varkappa\varrho} \, P_\varkappa = 0 \quad ; \qquad \text{d)}$$

für diejenigen p_ϱ aber, welche in c) vorkommen, haben wir auch diese Gleichungen zu berücksichtigen und also den Faktor von $\dot{p}_\varrho$ in denselben, nämlich -1, zu multiplizieren mit einem unbestimmten Faktor, welcher P_ϱ heifsen möge, und das Produkt der linken Seite hinzuzufügen; für diese p_ϱ wird also:

$$mf_\varrho + \sum_1^k{}_\varkappa \, p_{\varkappa\varrho} \, P_\varkappa - P_\varrho = 0 \quad . \qquad \text{e)}$$

Das Eintreten der h Gröfsen P_ϱ in die Bewegungsgleichungen vermehrt die Zahl der Unbekannten in denselben um h, und zur Bestimmung dieser h Gröfsen ist auch die Zahl der Bedingungsgleichungen um die h Gleichungen c) vermehrt, in welchen wir uns die $\dot{\mathfrak{p}}_\varrho$ als Funktionen der Zeit explicite gegeben denken müssen. Nehmen wir aber an, die Gröfsen P_ϱ

rechnen nicht zu den Unbekannten, sondern seien uns als Funktionen der Zeit unmittelbar gegeben, alsdann sind die h Gleichungen **c)** und jede Kenntnis der $\dot{\mathfrak{p}}_\varrho$ und des zweiten Systems überhaupt entbehrlich, und die $k+r$ Gleichungen **a) d) e)** genügen wiederum zur eindeutigen Bestimmung der $k+r$ Unbekannten $P_\varkappa$ und $\ddot{p}_\varrho$. Die h Multiplikatoren P_ϱ stellen also den Einflufs des zweiten Systems auf das erste vollständig dar, und ihre Gesamtheit kann als ein analytischer Ausdruck für diesen Einflufs angesehen werden, wie ihn die Aufgabe verlangt.

458 **Zusatz 1.** Wollen wir in symmetrischer Weise den Einflufs des ersten Systems auf das zweite darstellen, so haben wir die Koppelungsgleichungen zu schreiben in der Form:

a) $$\dot{p}_\varrho - \dot{\mathfrak{p}}_\varrho = 0 \quad ,$$

und es werden nun für diejenigen $\mathfrak{p}_\varrho$, welche sich in **a)** nicht finden, die Bewegungsgleichungen:

b) $$\mathfrak{m}\mathfrak{f}_\varrho + \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varkappa\, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho}\mathfrak{P}_\varkappa = 0 \quad ,$$

während sie für die übrigen $\mathfrak{p}_\varrho$ die Form annehmen:

c) $$\mathfrak{m}\mathfrak{f}_\varrho + \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varkappa\, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho}\mathfrak{P}_\varkappa - \mathfrak{P}_\varrho = 0 \quad ,$$

unter den $\mathfrak{P}_\varrho$ die unbestimmten Multiplikatoren der Gleichungen **a)** verstanden. Die Gesamtheit der $\mathfrak{P}_\varrho$ giebt uns einen Ausdruck für den Einflufs, welchen das erste System in jedem Augenblick auf die Bewegung des zweiten ausübt.

459 **Zusatz 2.** Offenbar können wir alle Bewegungsgleichungen des ersten Systems in der Form:

a) $$mf_\varrho + \sum_1^{k}{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}P_\varkappa - P_\varrho = 0$$

und alle Bewegungsgleichungen des zweiten Systems in der Form:

$$\mathfrak{m}\mathfrak{f}_\varrho + \sum_1^{\mathfrak{r}} {}_\varkappa\, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho} \mathfrak{P}_\varkappa - \mathfrak{P}_\varrho = 0 \qquad \textbf{b)}$$

schreiben, wenn wir in zulässiger, wenn auch willkürlicher Weise festsetzen, dafs für alle nicht gekoppelten Koordinaten die Gröfsen P_ϱ und $\mathfrak{P}_\varrho$ den Wert Null haben sollen. Allerdings verliert die Gesamtheit der P_ϱ und $\mathfrak{P}_\varrho$ dabei ihre Bedeutung als System der Multiplikatoren der Gleichungen **457c** und **458a**, aber sie behält ihre Bedeutung als Ausdruck des Einflusses, welchen das eine System auf das andere ausübt.

Analytische Darstellung der Kraft. Wir können und **460**
wollen daher im Einklang mit der Definition **455** festsetzen, dafs die Gesamtheit der für alle p_ϱ nach **459** eindeutig bestimmten Gröfsen P_ϱ den analytischen Ausdruck für die Kraft bilden solle, welche das System der $\mathfrak{p}_\varrho$ auf das System der p_ϱ ausübt. Entsprechend bildet dann die Gesamtheit der Gröfsen $\mathfrak{P}_\varrho$ den analytischen Ausdruck für die Kraft, welche das System der p_ϱ auf das der $\mathfrak{p}_\varrho$ ausübt. Die einzelnen Gröfsen P_ϱ bez. $\mathfrak{P}_\varrho$ heifsen die Komponenten der Kraft nach den entsprechenden Koordinaten p_ϱ bez. $\mathfrak{p}_\varrho$, auch wohl kurz die Kräfte nach diesen Koordinaten.

Durch diese Bestimmung setzen wir uns zugleich in Einklang mit der bestehenden Bezeichnung der Mechanik, und die Notwendigkeit, diesen Einklang herzustellen, rechtfertigt hinreichend, warum wir unter mehreren zulässigen Bestimmungen gerade diese getroffen haben.

Folgerung 1. Die Kraft, welche ein System auf ein **461**
zweites ausübt, kann betrachtet werden als eine Vektorgröfse in Bezug auf das zweite System, als eine Vektorgröfse nämlich, deren Komponenten nach den gemeinsamen Koordinaten im allgemeinen von Null verschieden sind, deren Komponenten nach den nicht gemeinsamen Koordinaten verschwinden, deren Komponenten nach solchen Richtungen aber, welche sich nicht durch Änderungen der benutzten Koordinaten ausdrücken lassen, unbestimmt bleiben.

462 **Folgerung 2.** Die Kraft, welche ein System auf ein zweites ausübt, kann aber auch betrachtet werden als Vektorgröfse in Bezug auf das erstere System, als eine Vektorgröfse nämlich, deren Komponenten nach den gemeinsamen Koordinaten im allgemeinen von Null verschieden sind, deren Komponenten nach den nicht gemeinsamen Koordinaten verschwinden, deren Komponenten in Richtungen aber, welche sich nicht durch Änderungen der benutzten Koordinaten ausdrücken lassen, unbestimmt bleiben.

463 **Anmerkung.** Betrachtet als Vektorgröfse in Bezug auf ein System enthält also jede Kraft Komponenten, welche abhängen von der Wahl der Koordinaten, d. h. von unserer willkürlichen Auffassung. Es rührt dies daher, dafs von der Wahl der Koordinaten die Mannigfaltigkeit derjenigen Bewegungen des Systems abhängt, welche wir überhaupt in Betracht ziehen, in deren Richtung wir also einen möglichen Einflufs zulassen wollen.

464 **Bemerkung 1.** Wird ein System nach einander mit mehreren anderen Systemen gekoppelt, und erleidet es dabei von diesen Systemen die gleiche Kraft, so ist seine Bewegung die gleiche, wie verschieden auch immer diese anderen Systeme unter sich sein mögen.

Wir reden daher auch (entsprechend der Definition 455) von der Bewegung eines Systems unter dem Einflufs oder der Einwirkung oder dem Angriff einer Kraft schlechthin, ohne der anderen Systeme zu erwähnen, von welchen sie ausgeht, und ohne welche sie nicht denkbar wäre.

465 **Bemerkung 2.** Wird ein System nach einander mit mehreren anderen Systemen gekoppelt, und führt es dabei die gleiche Bewegung aus, so kann es dabei auf jene anderen Systeme gleiche Kraft ausüben, obwohl jene Systeme unter sich vollkommen verschieden sein können.

Wir reden daher auch (entsprechend der Definition 455) von der Kraft, welche ein bewegtes System ausübt, schlechthin, ohne der anderen Systeme zu erwähnen, auf welche jene Kraft ausgeübt wird, und ohne welche sie nicht denkbar wäre.

Bemerkung 3. Da aber alle Kräfte, von welchen schlechthin die Rede ist, doch keine anderen sein können, als welche von materiellen Systemen zufolge des Grundgesetzes auf materielle Systeme ausgeübt werden, so haben alle Kräfte von vornherein gewisse Eigenschaften gemeinsam. Die Quelle aller solcher gemeinsamen Eigenschaften sind die Eigenschaften der materiellen Systeme und das Grundgesetz. 466

Wirkung und Gegenwirkung.

Bezeichnung. 1. Die Komponenten der Kraft, welche das System der $\mathfrak{p}_\varrho$ auf das der p_ϱ ausübt, betrachtet als Vektorgröfsen in Bezug auf das System der p_ϱ, haben wir in **460** bereits bezeichnet mit P_ϱ. Betrachten wir dieselbe Kraft als Vektorgröfse in Bezug auf das System der $\mathfrak{p}_\varrho$, so wollen wir ihre Komponenten nach den $\mathfrak{p}_\varrho$ bezeichnen mit $\mathfrak{P}'_\varrho$. Identisch ist dann für alle gemeinsamen Koordinaten: 467

$$P_\varrho = \mathfrak{P}'_\varrho \quad .$$

2. Die Komponenten der Kraft, welche das System der p_ϱ auf das der $\mathfrak{p}_\varrho$ ausübt, betrachtet als Vektorgröfsen in Bezug auf das System der $\mathfrak{p}_\varrho$, haben wir in **460** bereits bezeichnet mit $\mathfrak{P}_\varrho$. Betrachten wir dieselbe Kraft als Vektorgröfse in Bezug auf das System der p_ϱ, so wollen wir ihre Komponenten nach den p_ϱ bezeichnen mit P'_ϱ. Identisch ist dann für alle gemeinsamen Koordinaten:

$$\mathfrak{P}_\varrho = P'_\varrho \quad .$$

Die auf ein System ausgeübten Kräfte sind also durch nicht accentuierte, die von dem System ausgeübten Kräfte durch accentuierte Buchstaben bezeichnet, sobald wir sie als Vektorgröfsen in Bezug auf das System selbst betrachten.

Lehrsatz. Kraft und Gegenkraft sind einander stets entgegengesetzt gleich. Es soll damit gesagt sein, dafs die Komponenten beider nach jeder der benutzten Koordinaten entgegengesetzt gleich sind, und zwar sowohl wenn wir Kraft 468

(468) und Gegenkraft betrachten als Vektorgröfsen in Bezug auf das eine, als auch in Bezug auf das andere System.

Denn wir können auch die beiden gekoppelten Systeme (457) betrachten als ein einziges, freies System. Seine Masse ist $m + \mathfrak{m}$, seine Koordinaten sind die p_ϱ und $\mathfrak{p}_\varrho$. Seine Bedingungsgleichungen sind die Gleichungen **457a** und **b** und die Koppelungsgleichungen, etwa in der Form **457c**. Bezeichnen wir nunmehr die Multiplikatoren jener Gleichungen **a)** mit $P_\varkappa^0$, die der Gleichungen **b)** mit $\mathfrak{P}_\varkappa^0$, die der Gleichungen **c)** mit P_ϱ^0, so nehmen die Bewegungsgleichungen des gesamten Systems (vergl. **442**) die Form an:

a) $$m f_\varrho + \sum_1^k {}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa^0 - P_\varrho^0 = 0 \quad ,$$

b) $$\mathfrak{m} \mathfrak{f}_\varrho + \sum_1^{\mathfrak{k}} {}_\varkappa\, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho} \mathfrak{P}_\varkappa^0 + P_\varrho^0 = 0 \quad ,$$

in welchen für die Koordinaten, welche in den Koppelungsgleichungen nicht vorkommen, die P_ϱ^0 gleich Null zu setzen sind.

Die durch diese Gleichungen dargestellte Bewegung ist nun aber dieselbe, welche wir vorhin als Bewegung der einzelnen Systeme betrachteten. Eine mögliche Lösung der gegenwärtigen Gleichungen erhalten wir also, wenn wir für die f_ϱ und $\mathfrak{f}_\varrho$ ihre früheren Werte setzen, wenn wir machen

c) $$P_\varkappa^0 = P_\varkappa \quad , \quad \mathfrak{P}_\varkappa^0 = \mathfrak{P}_\varkappa \quad ,$$

aufserdem in **a)**

d) $$P_\varrho^0 = \quad P_\varrho$$

und in **b)**

e) $$P_\varrho^0 = - \mathfrak{P}_\varrho \quad .$$

Aber da durch die Gleichungen **a)** und **b)** die unbestimmten Multiplikatoren eindeutig bestimmt sind, so ist diese mögliche Lösung zugleich die einzig mögliche Lösung. Daher

gelten die Gleichungen **d)** und **e)** mit Notwendigkeit; aus ihnen folgt:

$$P_\varrho = -\mathfrak{P}_\varrho \quad , \qquad \text{f)}$$

oder mit Benutzung der Bezeichnung **467**:

$$P_\varrho = -P'_\varrho$$
$$\mathfrak{P}_\varrho = -\mathfrak{P}'_\varrho \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Anmerkung 1. Der vorstehende Lehrsatz entspricht der **469**
Lex tertia NEWTON's und wird auch wohl das Prinzip der Reaktion genannt. Doch deckt sich sein Inhalt nicht vollständig mit dem Inhalt jenes dritten Gesetzes, sondern das genaue Verhältnis ist das folgende:

Das NEWTON'sche Gesetz enthält unsern Lehrsatz **468** vollständig, nach der Absicht des Begründers, wie die dem Gesetze beigefügten Beispiele zeigen.

Das NEWTON'sche Gesetz enthält aber mehr. Wenigstens wird es auch allgemein angewandt auf die Wirkung von Fernkräften, d. h. von Kräften zwischen Körpern, welche keine gemeinsamen Koordinaten haben. Solche Kräfte aber kennt unsere Mechanik nicht. Damit man also beispielsweise aus unserem Lehrsatze die Folgerung ziehen könne, dafs ein Planet die Sonne mit gleicher Kraft anziehe wie diese ihn, ist nötig, dafs nähere Angaben über die Natur des Zusammenhanges zwischen beiden Körpern gemacht werden.

Anmerkung 2. Es darf aber als fraglich bezeichnet wer- **470**
den, ob der Überschufs dieser Anwendung des Reaktionsprinzipes über den Inhalt des Lehrsatzes **468** nach Form und Inhalt mit Recht zu den Grundgesetzen der Mechanik könne gerechnet werden, und ob nicht vielmehr der wesentliche und allgemein gültige Inhalt jenes Prinzipes bereits durch den Lehrsatz **468** erschöpft werde.

Was die Form anlangt, so ist offenbar die Fassung des dritten Gesetzes, sobald es auf Fernkräfte angewandt wird, nicht völlig klar bestimmt. Denn wenn Kraft und Gegen-

kraft an verschiedenen Körpern angreifen, so ist nicht schlechthin deutlich, was unter entgegengesetzter Richtung zu verstehen sei. Dies tritt zum Beispiel hervor, wenn es sich um die Wechselwirkung zwischen Stromelementen handelt.

Was den Inhalt anlangt, so stellt die Anwendung des Reaktionsprinzipes auf die Fernkräfte der gewöhnlichen Mechanik offenbar eine Erfahrungsthatsache dar, über deren genaues Zutreffen in allen Fällen man anfängt zweifelhaft zu werden. So ist die Elektrodynamik bereits fast überzeugt davon, dafs die Wechselwirkung zwischen bewegten Magneten dem Prinzip nicht in allen Fällen genau unterworfen sei.

Zusammensetzung der Kräfte.

471 **Lehrsatz.** Ist ein System gleichzeitig mit mehreren Systemen gekoppelt, so ist die Kraft, welche die Gesamtheit jener Systeme auf das erste System ausübt, gleich der Summe der Kräfte, welche die einzelnen Systeme auf dasselbe ausüben.

Es sei nämlich das System 1 von der Masse m und den Koordinaten p_ϱ, dessen Bedingungsgleichungen die k Gleichungen

a) $$\sum_1^r {}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\dot{p}_\varrho = 0$$

sind, gleichzeitig gekoppelt mit den Systemen 2, 3, etc., deren Koordinaten die $\mathfrak{p}_\varrho''$, $\mathfrak{p}_\varrho'''$, etc. sind.

Betrachten wir die Systeme 2, 3, etc. zunächst als getrennte Systeme, so sind die Koppelungsgleichungen für jede gemeinsame Koordinate p_ϱ zu schreiben in der Form:

b) $$\dot{\mathfrak{p}}_\varrho'' - \dot{p}_\varrho = 0$$

c) $$\dot{\mathfrak{p}}_\varrho''' - \dot{p}_\varrho = 0$$

etc.

Behandeln wir nun das aus 1, 2, 3, etc. zusammengesetzte System als freies und bezeichnen wieder die Multiplikatoren

der Gleichungen a) mit $P_\varkappa$, dagegen die von b) mit P''_ϱ, die (471)
von c) mit P'''_ϱ, etc., so erhalten wir die Bewegungsgleichungen des Systems 1 in der Form:

$$mf_\varrho + \sum_1^k{}^\varkappa p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa - P''_\varrho - P'''_\varrho - \text{etc} = 0 \quad , \qquad \text{d)}$$

worin die sämtlichen P''_ϱ, P'''_ϱ, etc. ebenso wie die $P_\varkappa$ eindeutig bestimmte Gröfsen sind. Die P''_ϱ, P'''_ϱ, etc. stellen die Komponenten der Kräfte dar, welche die einzelnen Systeme 2, 3, etc. auf das System 1 ausüben.

Betrachten wir nun aber zweitens die Systeme 2, 3, etc. zusammen als ein System, so können die nach Gleichungen b) c) etc. gleichen Gröfsen $\mathfrak{p}''_\varrho$, $\mathfrak{p}'''_\varrho$, etc. als eine einzige Koordinate $\mathfrak{p}_\varrho$ desselben angesehen werden, und an Stelle jener Koppelungsgleichungen tritt dann für jede gemeinsame Koordinate p_ϱ die eine Gleichung:

$$\dot{\mathfrak{p}}_\varrho - \dot{p}_\varrho = 0 \quad . \qquad \text{e)}$$

Ist P_ϱ der Multiplikator derselben, und bezeichnen wir mit $P^0_\varkappa$ die Multiplikatoren der Gleichungen a), welche dem jetzigen System der Bewegungsgleichungen entsprechen, so nehmen diese die Form an:

$$mf_\varrho + \sum_1^k{}^\varkappa p_{\varkappa\varrho} P^0_\varkappa - P_\varrho = 0 \quad . \qquad \text{f)}$$

Die P_ϱ stellen die Komponenten der Gesamtkraft dar, welche auf das System 1 wirkt.

Die verschiedene Auffassung kann nun die nach dem Grundgesetze erfolgende Bewegung selbst nicht ändern. Eine mögliche Lösung der Gleichungen f) erhalten wir daher, indem wir mit Benutzung der früheren Lösung setzen:

$$P^0_\varkappa = P_\varkappa \qquad \text{g)}$$

$$P_\varrho = P''_\varrho + P'''_\varrho + \text{etc.} \qquad \text{h)}$$

Aber da es nur eine einzige mögliche Lösung giebt, so

ist die vorstehende eben diese, und die Gleichung **h)**, welche unsere Behauptung enthält, mufs mit Notwendigkeit zutreffen.

472 **Folgerung 1.** Eine jede Zahl von Kräften, welche auf ein System wirkt, oder welche von einem System ausgeübt wird, kann aufgefafst werden als eine einzige Kraft, und zwar als diejenige Kraft, welche als Vektorgröfse in Bezug auf das System betrachtet gleich der Summe jener Kräfte ist.

Fassen wir eine Zahl von Kräften in dieser Weise auf, so sagen wir, dafs wir sie zusammensetzen. Das Ergebnis der Zusammensetzung nennen wir auch die Resultante der einzelnen Kräfte.

473 **Folgerung 2.** Eine jede Kraft, welche auf ein System wirkt, oder welche von einem System ausgeübt wird, kann aufgefafst werden als Summe einer beliebigen Zahl von Kräften, und zwar jeder Zahl von Kräften, deren Summe als Vektorgröfsen in Bezug auf das System gleich jener ursprünglichen Kraft ist.

Fassen wir eine Kraft in dieser Weise auf, so sagen wir, dafs wir sie zerlegen; die Kräfte, welche das Ergebnis einer solchen Zerlegung sind, nennen wir die Komponenten der ursprünglichen Kraft.

474 **Anmerkung.** Die geometrischen Komponenten einer Kraft nach den Koordinaten können zugleich als Komponenten derselben im Sinne von **473** aufgefafst werden.

475 **Definition.** Eine Kraft, welche von einem einzelnen materiellen Punkte ausgeübt wird, oder welche auf einen einzelnen materiellen Punkt wirkt, heifst eine Elementarkraft.

476 **Anmerkung.** Die elementare Mechanik versteht gewöhnlich unter Kräften nur Elementarkräfte. Im Gegensatz zu denselben bezeichnet man dann wohl die bisher von uns betrachteten allgemeineren Kraftformen als Lagrange'sche Kräfte. Man könnte dementsprechend die Elementarkräfte selbst auch passend als Galilei'sche oder Newton'sche Kräfte bezeichnen.

477 **Folgerung 1.** Jede Elementarkraft ist darstellbar durch die geometrische Verrückung eines Punktes, also durch eine nach Gröfse und Richtung gegebene Strecke.

Denn jede Elementarkraft ist Vektorgröfse in Bezug auf einen einzelnen Punkt.

Folgerung 2. Die Zusammensetzung der Elementarkräfte, welche an demselben Punkte angreifen, geschieht nach der Methode der geometrischen Zusammensetzung und Zerlegung von Strecken. 478

Insbesondere setzen sich also zwei Kräfte, welche an demselben Punkte angreifen, zusammen zu einer einzigen Kraft, welche nach Gröfse und Richtung durch die Diagonale eines Parallelogramms dargestellt ist, dessen Seiten nach Gröfse und Richtung jene Kräfte darstellen (Parallelogramm der Kräfte).

Folgerung 3. Jede LAGRANGE'sche Kraft ist darstellbar als eine Summe von Elementarkräften, also zerlegbar in Elementarkräfte. 479

Denn jede Verrückung eines Systems kann aufgefafst werden als eine Summe von Verrückungen seiner einzelnen Punkte.

Folgerung 4. Die Komponenten einer Kraft nach den rechtwinkligen Koordinaten des Systems, auf welches die Kraft wirkt, oder welches die Kraft ausübt, können unmittelbar aufgefafst werden als Elementarkräfte, welche auf die einzelnen materiellen Punkte des Systems wirken. 480

Bewegung unter dem Einflufs von Kräften.

Aufgabe 1. Die Bewegung eines materiellen Systems unter dem Einflufs einer gegebenen Kraft zu bestimmen. 481

Die Auflösung folgt unmittelbar aus 457. Sind die P_ϱ die gegebenen Komponenten der wirkenden Kraft nach den p_ϱ, so benutze man die r Gleichungen

$$mf_\varrho + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = P_\varrho$$

zusammen mit den k Bedingungsgleichungen des Systems zur Bestimmung der $r+k$ Gröfsen $\ddot{p}_\varrho$ und $P_\varkappa$, zu deren eindeutiger Bestimmung jene Gleichungen ausreichen.

482 **Anmerkung 1.** Die Bewegungsgleichungen eines Systems, auf welches Kräfte wirken, haben in den rechtwinkligen Koordinaten desselben die Form der $3n$ Gleichungen:

$$m_\nu \ddot{x}_\nu + \sum_1^i {}_\iota\, x_{\iota\nu} X_\iota = X_\nu \quad ,$$

wenn unter X_ν die Komponente der Kraft nach x_ν verstanden wird, und im übrigen die Bezeichnung von **368** benutzt wird.

483 **Anmerkung 2.** Ist die Koordinate p_ϱ eine freie Koordinate, so nimmt die ihr entsprechende Bewegungsgleichung die einfache Form an:

$$mf_\varrho = P_\varrho \quad .$$

Sind in einem holonomen System alle p_ϱ freie Koordinaten, so nehmen alle Bewegungsgleichungen des Systems diese Form an, und diese r Gleichungen genügen zur Bestimmung der r Gröſsen $\ddot{p}_\varrho$.

484 **Folgerung.** Die natürliche Bewegung eines materiellen Systems von einem bestimmten Augenblick an ist eindeutig bestimmt durch die Lage und Geschwindigkeit des Systems in jenem Augenblick und die Angabe der auf das System wirkenden Kraft für alle Zeiten von jenem Augenblick an (vergl. **331**, **444**).

485 **Lehrsatz.** Die Beschleunigung, welche mehrere gleichzeitig wirkende Kräfte einem System erteilen, ist gleich der Summe der Beschleunigungen, welche die Kräfte einzeln wirkend dem System erteilen würden.

Denn die Bewegungsgleichungen **481** sind linear in den f_ϱ und den $P_\varkappa$. Sind also die Wertsysteme $f_{\varrho_1} P_{\varkappa_1}$, $f_{\varrho_2} P_{\varkappa_2}$, etc. die Auflösungen dieser Gleichungen für die Kräfte $P_{\varrho_1}, P_{\varrho_2}$, etc., so ist das Wertsystem $f_{\varrho_1} + f_{\varrho_2} +$ etc., $P_{\varkappa_1} + P_{\varkappa_2} +$ etc. die Auflösung für die Kraft $P_{\varrho_1} + P_{\varrho_2} +$ etc.

486 **Anmerkung.** Der Inhalt des Lehrsatzes kann auch wiedergegeben werden in der Aussage, daſs mehrere gleichzeitig wirkende Kräfte sich hinsichtlich der Beschleunigung, welche

sie erzeugen, nicht stören. Ohne einen besonderen Namen erhalten zu haben, ist dieser Satz seit GALILEI's Zeiten stets als Prinzip angenommen und benutzt worden.

Folgerung. Die Beschleunigung, welche eine resultierende Kraft einem System erteilt, ist gleich der Summe der Beschleunigungen, welche die Komponenten, einzeln wirkend, dem System erteilen würden (**472, 473**). 487

Lehrsatz. Steht eine Kraft als Vektorgröfse senkrecht auf jeder möglichen Verrückung eines materiellen Systems, so übt sie keinen Einflufs auf die Bewegung des Systems aus, — und umgekehrt. 488

Denn ist π eine solche Kraft, so haben ihre Komponenten π_ϱ nach den p_ϱ die Form (250):

$$\pi_\varrho = \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\,\gamma_\varkappa \quad .$$

Lassen wir nun diese Kraft neben der Kraft P auf das System wirken, so können die Bewegungsgleichungen in der Form geschrieben werden:

$$mf_\varrho + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}(P_\varkappa - \gamma_\varkappa) = P_\varrho \quad .$$

Bei der Auflösung dieser Gleichungen nach $\ddot{p}_\varrho$ und $P_\varkappa$ erscheinen also nur die $P_\varkappa$ vergröfsert um die $\gamma_\varkappa$; die $\ddot{p}_\varrho$, welche allein die Bewegung bestimmen, erscheinen unverändert.

Umgekehrt: Ändert die Hinzufügung der Komponenten π_ϱ zu den rechten Seiten der Gleichungen 481 nicht die f_ϱ, sondern nur die $P_\varkappa$, so lassen sich die π_ϱ schreiben in der Form:

$$\pi_\varrho = \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\,\gamma_\varkappa \quad ;$$

die Kraft π steht also senkrecht auf jeder möglichen Verrückung des Systems (250).

489 **Anmerkung.** Der Lehrsatz giebt die Bedingung an, welcher derjenige Teil einer als Vektorgröfse betrachteten Kraft unterworfen ist, welcher von der Wahl der Koordinaten, also von unserer Willkür abhängt (463). Denn dieser Teil mufs notwendig ein solcher sein, welcher in der wirklichen Bewegung nicht zur Geltung kommt.

490 **Folgerung.** Obgleich aus der Kenntnis der auf ein System wirkenden Kraft eindeutig geschlossen werden kann auf die Bewegung des Systems, so kann doch aus der Bewegung des Systems nicht eindeutig geschlossen werden auf die Kraft, welche das System beeinflufst.

491 **Aufgabe 2.** Die Kraft zu bestimmen, welche ein materielles System bei gegebener Bewegung ausübt.

Nach 467 bezeichnen wir mit P'_ϱ die Komponente der gesuchten Kraft nach der Koordinate p_ϱ; aus 468 und 481 folgt dann:

$$P'_\varrho = -mf_\varrho - \sum_1^k {}^\varkappa p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa \quad .$$

In diesen Gleichungen sind die f_ϱ als gegeben zu betrachten, und zwar müssen sie den Bedingungsgleichungen an sich genügen. Die Gröfsen $P_\varkappa$ sind ebenfalls bestimmt, wenn auch dasjenige System gegeben wird, mit welchem das betrachtete gekoppelt ist. So lange aber nur die Bewegung des Systems der p_ϱ gegeben ist, bleiben die $P_\varkappa$ unbekannt. Die Kraft, welche ein bewegtes System ausübt, ist also allein durch die Angabe der Bewegung des Systems noch nicht völlig bestimmt, sondern enthält einen unbestimmt bleibenden Summanden, dessen Komponenten die Form haben:

$$\pi_\varrho = \sum_1^k {}^\varkappa p_{\varkappa\varrho} \gamma_\varkappa \quad ,$$

und welcher daher auf jeder möglichen Verrückung des Systems senkrecht steht.

492 **Anmerkung.** Obwohl von der Kraft, welche ein bewegtes System ausübt, nicht alle Komponenten durch die Bewegung

des Systems eindeutig bestimmt sind, so sind doch die Komponenten in Richtung einer jeden möglichen Verrückung des Systems durch seine Bewegung eindeutig bestimmt.

Folgerung. Von der Kraft, welche ein bewegtes System ausübt, sind die Komponenten in Richtung einer jeden freien Koordinate des Systems durch die Bewegung eindeutig bestimmt. 493

Ist nämlich p_ϱ eine freie Koordinate, so verschwinden die $p_{\varkappa\varrho}$ und damit die unbestimmten Glieder, und es kann die Komponente der Kraft des Systems nach p_ϱ geschrieben werden in den Formen:

$$P'_\varrho = -mf_\varrho \qquad (491)\ \text{a)}$$

$$= \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right) \qquad (291\,\text{a})\ \text{b)}$$

$$= \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} - \dot{q}_\varrho \qquad (291\,\text{b})\ \text{c)}$$

$$= -\frac{\partial_q E}{\partial p_\varrho} - \dot{q}_\varrho \qquad (294).\ \text{d)}$$

Innerer Zwang.

Lehrsatz. Die Beschleunigung eines Systems materieller Punkte, zwischen welchen keine Zusammenhänge bestehen, findet statt in Richtung der Kraft, welche auf das System wirkt, und ihre Gröfse ist gleich der Gröfse der Kraft, dividiert durch die Masse des Systems. 494

Denn wenn zwischen den n Punkten eines Systems keine Zusammenhänge bestehen, so ist für jede der $3n$ rechtwinkligen Koordinaten des Systems: (482)

$$\frac{m_\nu}{m}\ddot{x}_\nu = \frac{X_\nu}{m} \quad ;$$

die linken Seiten der Gleichungen aber stellen die Komponenten der Beschleunigung des Systems nach den x_ν dar (275).

495 **Folgerung.** Die Beschleunigung eines einzelnen materiellen Punktes geschieht in Richtung der Kraft, welche auf den Punkt wirkt, und ihre Gröfse ist gleich der Gröfse der Kraft, dividiert durch die Masse des Punktes. (NEWTON's Lex secunda.)

496 **Anmerkung.** Bestehen Zusammenhänge zwischen den Punkten eines materiellen Systems, auf welches eine Kraft wirkt, so weicht die Beschleunigung des Systems im allgemeinen ab von der durch den Lehrsatz **494** gegebenen. Als Ursache dieser Abweichung können wir also die Zusammenhänge des Systems ansehen, und die Abweichung selbst haben wir nach **385** als den inneren Zwang des Systems zu bezeichnen.

497 **Aufgabe.** Den inneren Zwang eines Systems zu bestimmen, welches sich unter dem Einflufs von Kräften bewegt.

Die wirkliche Komponente der Beschleunigung des Systems nach der allgemeinen Koordinate p_ϱ ist f_ϱ, die Komponente, welche nach Aufhebung der Bedingungsgleichungen eintreten würde, ist (**494**) P_ϱ / m, der Unterschied beider Gröfsen, oder:

a) $$z_\varrho = f_\varrho - \frac{P_\varrho}{m} \quad ,$$

also die Komponente des Zwanges nach p_ϱ.

Zur Bestimmung der Gröfse des Zwanges reicht die Kenntnis der Komponenten desselben nach den p_ϱ im allgemeinen nicht aus (**245**). Wenden wir deshalb auch rechtwinklige Koordinaten an, so erhalten wir für die Komponente nach x_ν:

b) $$z_\nu = \frac{1}{m} (m_\nu \ddot{x}_\nu - X_\nu) \quad ,$$

also die Gröfse z des Zwanges als die positive Wurzel der Gleichung (**244**):

c) $$mz^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{1}{m_\nu} (m_\nu \ddot{x}_\nu - X_\nu)^2$$
$$= \sum_1^{3n}{}_\nu m_\nu \left(\ddot{x}_\nu - \frac{X_\nu}{m_\nu}\right)^2 \quad .$$

Lehrsatz 1. Die Gröfse des Zwanges eines materiellen 498
Systems unter dem Einflufs von Kräften ist wie bei einem freien System in jedem Augenblick kleiner für die natürliche Bewegung, als für irgend eine andere mögliche Bewegung, welche in dem betrachteten Augenblick nach Lage und Geschwindigkeit mit jener zusammenfällt.

Denn als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs bei gegebenen Werten der X_ν die Gröfse $\frac{1}{2} mz^2$ ein Minimum werde, erhalten wir nach derselben Methode wie in **155** die $3n$ Gleichungen:

$$m_\nu \ddot{x}_\nu - X_\nu + \sum_1^i{}_\iota \, x_{\iota\nu} X_\iota = 0 \quad ,$$

in welchen die X_ι i unbestimmte Multiplikatoren bezeichnen, welche zusammen mit den $3n$ Gröfsen $\ddot{x}_\nu$ aus jenen $3n$ Gleichungen und den i Bedingungsgleichungen des Systems eindeutig zu bestimmen sind. Die vorstehenden Gleichungen aber ergeben dieselben Werte der $\ddot{x}_\nu$ und X_ι, wie die mit ihnen übereinstimmenden Gleichungen der natürlichen Bewegung (**482**).

Anmerkung. Der vorstehende Lehrsatz enthält das voll- 499
ständige GAUSS'sche Prinzip des kleinsten Zwanges. Wir können den Lehrsatz **388** als einen besonderen Fall desselben bezeichnen. Aber nach unserer ganzen Auffassung werden wir lieber jenen Lehrsatz als den allgemeinen ansehen und den vorliegenden als die Anpassung desselben an besondere, verwickeltere Verhältnisse betrachten.

Lehrsatz 2. Die Richtung des Zwanges steht bei der 500
natürlichen Bewegung eines Systems unter dem Einflufs einer Kraft, wie bei der natürlichen Bewegung eines freien Systems, beständig senkrecht auf jeder möglichen oder virtuellen Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage.

Denn zufolge **497a** und **481** lassen sich die Komponenten des Zwanges nach den p_ϱ auch schreiben in der Form:

$$z_\varrho = -\frac{1}{m} \sum_1^k{}_\varkappa \, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa \quad ;$$

der Zwang als Vektorgröfse steht also (**250**) senkrecht auf jeder möglichen Verrückung des Systems.

501 **Symbolischer Ausdruck.** Bezeichnen wir mit δp_ϱ die Änderungen der Koordinaten p_ϱ für irgend eine beliebige mögliche Verrückung des Systems, so können wir den vorstehenden Satz in die Gestalt der symbolischen Gleichung kleiden (vergl. **393**):

$$\text{a)} \qquad \sum_1^r{}_\varrho \left(f_\varrho - \frac{P_\varrho}{m}\right) \delta p_\varrho = 0 \quad ,$$

welche unter Anwendung rechtwinkliger Koordinaten die Form annimmt:

$$\text{b)} \qquad \sum_1^{3n}{}_\nu \left(m_\nu \ddot{x}_\nu - X_\nu\right) \delta x_\nu = 0 \quad .$$

502 **Anmerkung.** Der Lehrsatz **500** enthält das vollständige d'Alembert'sche Prinzip, die Gleichungen **501a** und **b** die gewöhnliche Fassung desselben. Über das Verhältnis des Satzes **500** zu dem Satz **392** ist dasselbe zu bemerken, wie unter **499**.

503 **Folgerung 1.** Die Komponente der Beschleunigung eines materiellen Systems in Richtung einer jeden möglichen Bewegung ist gleich der Komponente der wirkenden Kraft nach dieser Richtung, dividiert durch die Masse des Systems.

Denn die Komponente des Zwanges nach der Richtung jeder möglichen Bewegung verschwindet.

504 **Folgerung 2.** Die Komponente der Beschleunigung eines materiellen Systems in Richtung seiner wirklichen Bewegung ist gleich der Komponente der wirkenden Kraft nach der gleichen Richtung, dividiert durch die Masse des Systems.

505 **Folgerung 3.** Die Komponente der Beschleunigung eines materiellen Systems nach jeder freien Koordinate des Systems ist gleich der Komponente der wirkenden Kraft nach der gleichen Richtung, dividiert durch die Masse des Systems.

506 **Lehrsatz.** Bei der natürlichen Bewegung eines materiellen Systems unter dem Einfluſs von Kräften ist die Komponente der Beschleunigung nach jeder Koordinate der absoluten

Lage beständig gleich der Komponente der wirkenden Kraft nach der gleichen Richtung, dividiert durch die Masse des Systems, — welches auch der innere Zusammenhang des Systems ist.

Folgerung 1. Wählen wir die Koordinaten eines Systems 507
übrigens beliebig, jedoch so, dafs sich unter ihnen sechs Koordinaten der absoluten Lage finden, so können wir bei vorhandener Kenntnis der auf das System wirkenden Kräfte, aber ohne Kenntnis des inneren Zusammenhangs des Systems doch stets sechs der Bewegungsgleichungen des Systems angeben.

Folgerung 2. Treffen wir insbesondere über die Koordi- 508
naten der absoluten Lage dieselbe Verfügung wie in **402** und wenden den Lehrsatz zunächst an auf die Richtung der 3 Koordinaten $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$, so ergiebt er uns die drei Gleichungen:

$$\sum_1^n{}_\nu\, m_\nu \ddot{x}_{3\nu} = \sum_1^n{}_\nu\, X_{3\nu}$$

$$\sum_1^n{}_\nu\, m_\nu \ddot{x}_{3\nu-1} = \sum_1^n{}_\nu\, X_{3\nu-1}$$

$$\sum_1^n{}_\nu\, m_\nu \ddot{x}_{3\nu-2} = \sum_1^n{}_\nu\, X_{3\nu-2} \quad .$$

Diese drei Gleichungen, welche sich dahin interpretieren lassen, dafs der Schwerpunkt sich so bewegt, als sei die ganze Masse des Systems in ihm vereinigt, und griffen an ihm alle Elementarkräfte an, bilden das sogenannte erweiterte Prinzip des Schwerpunkts. (Vergleiche **404**.)

Folgerung 3. Angewandt auf die Richtung der drei Ko- 509
ordinaten der absoluten Lage $\omega_1\ \omega_2\ \omega_3$ ergiebt der Lehrsatz die drei Gleichungen:

$$\sum_1^n{}_\nu\, m_\nu(x_{3\nu-2}\ddot{x}_{3\nu-1} - x_{3\nu-1}\ddot{x}_{3\nu-2}) = \sum_1^n{}_\nu\, (x_{3\nu-2}X_{3\nu-1} - x_{3\nu-1}X_{3\nu-2})$$

$$\sum_1^n{}_\nu\, m_\nu(x_{3\nu}\ \ddot{x}_{3\nu-2} - x_{3\nu-2}\ddot{x}_{3\nu}\ ) = \sum_1^n{}_\nu\, (x_{3\nu}\ X_{3\nu-2} - x_{3\nu-2}X_{3\nu}\ )$$

$$\sum_1^n{}_\nu\, m_\nu(x_{3\nu-1}\ddot{x}_{3\nu}\ - x_{3\nu}\ \ddot{x}_{3\nu-1}) = \sum_1^n{}_\nu\, (x_{3\nu-1}X_{3\nu}\ - x_{3\nu}\ X_{3\nu-1})\,.$$

Diese drei Gleichungen bilden das sogenannte erweiterte Prinzip der Flächen. (Vergleiche **406**.)

Energie, Arbeit.

510 **Definition.** Die Vermehrung der Energie eines Systems, vorgestellt als Folge einer auf das System ausgeübten Kraft, wird die Arbeit jener Kraft genannt.

Die Arbeit, welche eine Kraft in bestimmter Zeit leistet, wird gemessen durch die Zunahme der Energie des Systems, auf welches sie wirkt, in jener Zeit.

Eine etwaige Abnahme der Energie infolge des Vorhandenseins der Kraft rechnen wir als negative Zunahme. Die Arbeit einer Kraft kann also positiv oder negativ sein.

511 **Folgerung.** Während die auf ein System wirkende Kraft eine gewisse Arbeit leistet, leistet die von dem System ausgeübte Gegenkraft stets die entgegengesetzt gleiche Arbeit.

Denn die letztere Arbeit ist gleich der Zunahme der Energie desjenigen Systems, mit welchem das betrachtete gekoppelt ist; die Summe der Energieen beider Systeme aber ist konstant.

512 **Lehrsatz.** Die Arbeit, welche die auf ein System wirkende Kraft während der Durchlaufung eines Bahnelements leistet, ist gleich dem Produkt aus der Länge des Elements und der Komponente der Kraft in seiner Richtung.

Denn die Zunahme dE der Energie während des Zeitelements dt, in welchem das Bahnelement ds zurückgelegt wird, ist (**283**):

$$dE = m v \dot{v} \, dt = m \dot{v} \, ds \quad .$$

Nach **280** ist aber $\dot{v}$ die Komponente der Beschleunigung des Systems in Richtung seiner Bahn, also nach **504** $m\dot{v}$ die Komponente der Kraft in Richtung der Bahn.

513 **Anmerkung 1.** Die in Rede stehende Arbeit ist mit demselben Rechte auch gleich dem Produkt aus der Gröfse der

Kraft und der in ihre Richtung fallenden Komponente des Bahnelements.

Anmerkung 2. Erleiden während der Durchlaufung des Bahnelements ds die Koordinaten p_ϱ die Änderungen dp_ϱ, so ist die Arbeit der wirkenden Kraft dargestellt durch die Gleichung: 514

$$dE = \sum_1^r{}_\varrho P_\varrho dp_\varrho \quad .$$

Denn die Komponente der Kraft in Richtung des Bahnelements ist gleich (247):

$$\sum_1^r{}_\varrho P_\varrho \frac{dp_\varrho}{ds} \quad .$$

Folgerung 1. Die Kraft, welche auf ein System wirkt, leistet positive oder negative Arbeit, je nachdem der Winkel, welchen sie mit der Geschwindigkeit des Systems bildet, kleiner oder gröfser als ein rechter ist. Steht die Kraft senkrecht auf der Bewegungsrichtung, so leistet sie keine Arbeit. 515

Folgerung 2. Eine Kraft, welche auf ein ruhendes System wirkt, leistet keine Arbeit. 516

Gleichgewicht, Statik.

Definition. Wir sagen, zwei oder mehrere Kräfte, welche auf dasselbe System wirken, halten sich das Gleichgewicht, wenn eine jede von ihnen den Einflufs der anderen aufhebt, d. h. wenn unter dem Einflufs beider oder aller jener Kräfte das System sich so bewegt, als wäre keine von ihnen vorhanden. 517

Lehrsatz. Zwei oder mehrere Kräfte halten sich das Gleichgewicht, wenn ihre Summe senkrecht steht auf jeder möglichen (virtuellen) Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage, — und umgekehrt. 518

Der Satz folgt unmittelbar aus 471 und 488.

519 **Symbolischer Ausdruck.** Bezeichnen wir mit P'_ϱ, P''_ϱ, etc. die Komponenten der einzelnen Kräfte nach den p_ϱ, mit δp_ϱ die Änderungen der p_ϱ für irgend eine mögliche Verrückung des Systems, so können wir die Forderung des vorstehenden Satzes in die Gestalt der symbolischen Gleichung kleiden:

$$\sum_1^r{}_\varrho \, (P'_\varrho + P''_\varrho + \text{etc})\, \delta p_\varrho = 0 \quad .$$

Vergleiche **393**, **501**.

520 **Anmerkung.** Der vorstehende Lehrsatz enthält das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten (Verrückungen, Momente), die Gleichung **519** die gewöhnliche analytische Fassung desselben.

521 **Folgerung 1.** Halten sich mehrere Kräfte an einem System das Gleichgewicht, so verschwindet die Summe der von den Kräften geleisteten Arbeiten bei jeder möglichen (virtuellen) Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage, — und umgekehrt. (Prinzip der virtuellen Arbeit.)

Denn schreiben wir die Gleichung **519** in der Form:

$$\sum_1^r{}_\varrho \, P'_\varrho \, \delta p_\varrho + \sum_1^r{}_\varrho \, P''_\varrho \, \delta p_\varrho + \text{etc} = 0 \quad ,$$

so ergiebt sich nach **514** die Behauptung.

522 **Folgerung 2.** Halten sich zwei oder mehr Kräfte das Gleichgewicht an einem System, so verschwindet die Summe ihrer Komponenten in Richtung jeder möglichen Bewegung des Systems.

523 **Folgerung 3.** Halten sich zwei oder mehr Kräfte das Gleichgewicht an einem System, so verschwindet die Summe ihrer Komponenten nach jeder freien Koordinate des Systems.

524 **Lehrsatz.** Halten sich zwei oder mehr Kräfte das Gleichgewicht an einem System, so verschwindet die Summe ihrer Komponenten in Richtung einer jeden Koordinate der abso-

luten Lage, welches auch immer der innere Zusammenhang des Systems sein möge.

Anmerkung. Auch ohne Kenntnis des inneren Zusammen- 525
hangs eines Systems können wir demnach doch stets 6 notwendige Bedingungsgleichungen für sein Gleichgewicht angeben. Wählen wir als Koordinaten der absoluten Lage die 6 Gröfsen $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \omega_1 \omega_2 \omega_3$, welche wir in **402** einführten, so liefert uns der vorige Lehrsatz diejenigen 6 Gleichungen, welche dem Prinzip des Schwerpunkts und der Flächen entsprechen, und welche Lagrange im 3. Abschnitt § 1 und § 2 des ersten Teils der Mécanique analytique behandelt.

Bemerkung 1. Halten sich zwei oder mehr Kräfte in 526
einer bestimmten Lage des Systems das Gleichgewicht bei einer gewissen Geschwindigkeit, so halten sich dieselben Kräfte in derselben Lage das Gleichgewicht auch bei jeder anderen Geschwindigkeit.

Denn die Bedingung des Gleichgewichts enthält nicht die wirkliche Geschwindigkeit des Systems.

Bemerkung 2. Halten sich zwei oder mehr Kräfte das 527
Gleichgewicht an einem ruhenden System, so beharrt das System in seinem Zustand der Ruhe; und umgekehrt: Beharrt ein System trotz des Angriffs zweier oder mehrerer Kräfte in der Ruhe, so halten sich die Kräfte an dem System das Gleichgewicht.

Folgerung 1. Zwei Kräfte, welche, gleichzeitig an dem- 528
selben ruhenden System angreifend, die Ruhe des Systems nicht stören, haben entgegengesetzt gleiche Komponenten in Richtung jeder möglichen Bewegung des Systems.

Folgerung 2. Zwei Kräfte, welche, nach einander auf das- 529
selbe ruhende System zugleich mit denselben andern Kräften wirkend, das System in Ruhe lassen, haben gleiche Komponenten in Richtung jeder möglichen Bewegung des Systems.

Anmerkung. Auf den letzten beiden Folgerungen beruht 530
die statische Vergleichung der Kräfte.

Maschinen und innere Kräfte.

531 **Definition.** Ein System, dessen Massen als verschwindend klein betrachtet werden gegen die Massen der Systeme, mit welchen es gekoppelt ist, wird eine Maschine genannt.

Eine Maschine ist also hinsichtlich ihres Einflusses auf die Bewegung der übrigen Systeme vollständig dargestellt durch ihre Bedingungsgleichungen; die Kenntnis des Ausdrucks der Energie der Maschine in ihren Koordinaten ist nicht erforderlich.

Einfach heifst eine Maschine, welche nur einen Grad der Bewegungsfreiheit hat.

532 **Lehrsatz.** So lange eine Maschine sich mit endlicher Geschwindigkeit bewegt, halten sich die auf die Maschine wirkenden Kräfte beständig das Gleichgewicht.

Denn ergäben diese Kräfte eine Komponente in Richtung irgend einer möglichen Bewegung der Maschine, so würde die Komponente der Beschleunigung in dieser Richtung wegen der verschwindenden Masse unendlich grofs (**504**).

533 **Folgerung.** Zwischen den Komponenten der auf eine Maschine wirkenden Kräfte nach ihren Koordinaten besteht eine Anzahl homogener linearer Gleichungen, deren Zahl gleich der Zahl der Bewegungsfreiheiten der Maschine ist. Eine einfache Maschine wird vertreten durch eine einzige homogene lineare Gleichung zwischen den auf ihre Koordinaten wirkenden Kräften.

534 **Bemerkung 1.** Wird eine Maschine nach allen ihren Koordinaten gekoppelt mit zwei oder mehr materiellen Systemen, so kann die auf diese Art hergestellte mechanische Verbindung zwischen den letzteren analytisch dargestellt werden durch einen Satz homogener linearer Differentialgleichungen zwischen den Koordinaten der verbundenen Systeme. Denn wir können in den Bedingungsgleichungen der Maschine die Koordinaten derselben ersetzen durch die ihnen gleichen Koordinaten der verbundenen Systeme.

Umgekehrt können wir daher auch jeden analytisch gegebenen Satz homogener linearer Differentialgleichungen zwischen

den Koordinaten zweier oder mehrerer Systeme physikalisch deuten als eine mechanische Verbindung der angegebenen Art, welche wir bezeichnen als eine Koppelung jener Systeme durch die Maschine.

Folgerung. Sind zwei oder mehr Systeme durch eine 535
Maschine gekoppelt, so ist die von jedem der Systeme geleistete Arbeit entgegengesetzt gleich der Summe der von den übrigen Systemen geleisteten Arbeit. Bei der Koppelung der Systeme mittels einer Maschine wird also Arbeit nicht gewonnen.

Denn die von den Systemen ausgeübten Kräfte halten sich an der Maschine das Gleichgewicht, die Summe der von ihnen geleisteten Arbeit ist also Null.

Bemerkung 2. Ein jedes materielle System kann auf 536
mannigfaltige Art aufgefafst werden als bestehend aus zwei oder mehr Systemen, welche durch Maschinen gekoppelt sind. Denn teilen wir die Massen des Systems in mehrere Teile, und sind die p'_ϱ Koordinaten des ersten Teiles, die p''_ϱ Koordinaten des zweiten Teiles, u. s. w., so können wir diejenigen Bedingungsgleichungen des vollständigen Systems, welche nur die p'_ϱ enthalten, betrachten als Bedingungsgleichungen des ersten Teilsystems, diejenigen Gleichungen, welche nur die p''_ϱ enthalten, als Bedingungsgleichungen des zweiten Teilsystems, u. s. w., während diejenigen Bedingungsgleichungen des vollständigen Systems, welche die p'_ϱ, p''_ϱ u. s. w. gemischt enthalten, aufgefafst werden als die Gleichungen der die Teilsysteme koppelnden Maschinen.

Die Kräfte, welche bei dieser zulässigen, wenn auch willkürlichen Auffassung auf die Teilsysteme von den sie koppelnden Maschinen ausgeübt werden, bezeichnen wir als innere Kräfte des Systems.

Folgerung 1. Ein jeder Satz innerer Kräfte kann einen 537
Teil des Zusammenhanges eines Systems ersetzen. Lassen wir nämlich diejenigen Bedingungsgleichungen des ganzen Systems fort, welche die Maschinen zwischen den Teilsystemen darstellen, behalten aber die von den Maschinen ausgeübten Kräfte bei, so bewegt sich das System wie vorher.

538 **Folgerung 2.** Der gesamte Zusammenhang eines Systems kann aufgelöst werden in und ersetzt werden durch eine Anzahl von Elementarkräften, welche auf die einzelnen materiellen Punkte des Systems wirken.

Denn wir können die einzelnen Punkte als Teilsysteme betrachten und das ganze System als Gesamtheit dieser durch Maschinen gekoppelten Teilsysteme.

539 **Folgerung 3.** Die inneren Kräfte, welche den Zusammenhang eines Systems vollständig oder teilweise ersetzen, halten sich, an dem ursprünglichen System angreifend, beständig das Gleichgewicht.

Denn sie halten sich nach 532 das Gleichgewicht an den Maschinen, welche Teile des ursprünglichen Systems bilden.

540 **Anmerkung.** Diese letztere Überlegung ist es, mit deren Hülfe in der gewöhnlichen Entwickelung der Mechanik der Übergang von den Gesetzen des Gleichgewichts (dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten) zu den Gesetzen der Bewegung (dem D'ALEMBERT'schen Prinzip) gemacht wird.

Messung der Kräfte.

541 Aus unseren Überlegungen ergeben sich im Ganzen drei unabhängige Methoden, um diejenigen Komponenten der Kräfte unmittelbar zu messen, welche überhaupt Einfluſs auf die Erscheinungen haben. Durch Anwendung einer jeden dieser drei Methoden können auch die Kräfte aus Rechnungsgröſsen zu Gegenständen der unmittelbaren Erfahrung gemacht werden, d. h. zu Zeichen für bestimmte Verbindungen sinnlicher Empfindungen und Wahrnehmungen.

542 Die erste Methode bestimmt die Kraft aus den Massen und Bewegungen des Systems, von welchem sie ausgeübt wird. Physikalisch wird diese Methode die Messung der Kraft nach ihrem Ursprung genannt. Sie wird z. B. angewandt in der Annahme, daſs gleich gespannte Federn, gleiche Mengen explodierenden Pulvers u. s. w. unter übrigens gleichen Verhältnissen gleiche Kräfte ausüben.

Die zweite Methode bestimmt die Kraft aus den Massen und der Bewegung des Systems, auf welches sie wirkt. In der Physik wird diese Methode als die dynamische Messung der Kraft bezeichnet. Sie wurde z. B. von NEWTON angewandt, als er die auf die Planeten wirkende Kraft aus deren Bewegung ableitete. 543

Die dritte Methode bestimmt die Kraft, indem sie sie mit bekannten Kräften ins Gleichgewicht bringt. Diese Methode wird die statische genannt. Auf ihr beruhen z. B. alle Kräftemessungen mit der Wage. 544

Angewandt zur Bestimmung einer und derselben Kraft unter Beobachtung der von uns abgeleiteten Beziehungen müssen aber diese drei verschiedenen Methoden unter allen Umständen zu dem gleichen Resultate führen, wenn anders das Grundgesetz, auf welches sich unsere Überlegungen stützen, wirklich alle mögliche mechanische Erfahrung richtig zusammenfafst. 545

Abschnitt 5. Systeme mit verborgenen Massen.

I. Cyklische Bewegung.

Definition 1. Cyklische Koordinate eines Systems heifst eine freie Koordinate des Systems dann, wenn die Länge einer unendlich kleinen Verrückung des Systems nicht von dem Werte der Koordinate, sondern nur von dem ihrer Änderung abhängt. 546

Anmerkung 1. Es giebt cyklische Koordinaten. Denn es genügt z. B. eine rechtwinklige Koordinate des Systems, wenn sie frei ist, der Voraussetzung. Cyklische Koordinaten können stets eingeführt werden, wenn unendlich kleine Verrückungen des Systems möglich sind, welche nicht eine Änderung der Massenverteilung im Raume zur Folge haben, sondern nur eine cyklische Vertauschung der Massen unter sich. 547

Daher der Name. Es können aber auch unter anderen Verhältnissen cyklische Koordinaten auftreten, wie es das Beispiel der rechtwinkligen Koordinaten zeigt.

548 **Anmerkung 2.** Die Energie eines Systems hängt nicht ab von dem Werte seiner cyklischen Koordinaten, sondern nur von deren Änderungsgeschwindigkeiten mit der Zeit.

549 **Definition 2.** Cyklisches System heifst ein materielles System, dessen Energie mit hinreichender Annäherung als eine homogene quadratische Funktion der Änderungsgeschwindigkeiten seiner cyklischen Koordinaten erscheint.

Ein cyklisches System heifst ein monocyklisches, dicyklisches, u. s. w., je nachdem es eine, zwei, u. s. w. cyklische Koordinaten besitzt.

In einem cyklischen System werden die nicht cyklischen Koordinaten auch die Parameter des Systems genannt; die Änderungsgeschwindigkeiten der cyklischen Koordinaten nennen wir auch die cyklischen Intensitäten.

550 **Anmerkung 1.** Die Bedingung, deren angenäherte Erfüllung für cyklische Systeme erfordert wurde, kann mit Strenge überhaupt nicht erfüllt sein, abgesehen von dem Falle, dafs das System nur cyklische Koordinaten besitzt.

Denn ist eine Gröfse Koordinate eines Systems, so bedingt ihre Änderung eine Verrückung mindestens eines materiellen Punktes des Systems; die Energie dieses Punktes ist also quadratische Funktion der Änderungsgeschwindigkeit jener Koordinate, und für die Energie des Systems gilt demnach das gleiche. Die Energie eines jeden Systems enthält daher in Strenge notwendig die Änderungsgeschwindigkeiten aller Gröfsen, welche überhaupt Koordinaten des Systems sind, also auch die Energie eines cyklischen Systems die Änderungsgeschwindigkeiten seiner Parameter.

551 **Anmerkung 2.** Jene Bedingung für das Auftreten eines cyklischen Systems kann aber mit jedem beliebigen Grade der Annäherung erfüllt sein, sobald das System überhaupt cyklische Koordinaten besitzt.

Sie ist nämlich erfüllt in dem Falle, dafs die Teile der Energie, welche die Änderungsgeschwindigkeiten der Para-

meter enthalten, verschwinden gegen die Teile, welche von den cyklischen Intensitäten abhängen, und dies kann stets dadurch erreicht werden, daſs die Änderungsgeschwindigkeiten der Parameter hinreichend klein, oder daſs die cyklischen Intensitäten hinreichend groſs angenommen werden. Wie groſs diese oder wie klein jene angenommen werden müssen, damit ein bestimmter Grad der Annäherung erzielt werde, hängt ab von den besonderen Werten der Koefficienten im Ausdruck der Energie.

Im Folgenden wird stets vorausgesetzt, daſs die Bedingung der cyklischen Systeme mit so groſser Annäherung erfüllt sei, daſs wir so reden können, als sei sie genau erfüllt.

Bezeichnung. Wir bezeichnen die cyklischen Koordinaten 552
des Systems mit $\mathfrak{p}_\varrho$, mit $\mathfrak{r}$ ihre Zahl, die Momente des Systems nach den $\mathfrak{p}_\varrho$ mit $\mathfrak{q}_\varrho$. Die r nicht cyklischen Koordinaten des Systems mögen mit p_ϱ, die Momente nach ihnen mit q_ϱ bezeichnet werden. Die Masse des cyklischen Systems sei $\mathfrak{m}$.

Die äuſseren Kräfte, welche auf das System wirken, mögen nach den p_ϱ die Komponenten P_ϱ, nach den $\mathfrak{p}_\varrho$ die Komponenten $\mathfrak{P}_\varrho$ haben. Die Kräfte, welche das System selbst ausübt, haben dann nach den p_ϱ, beziehlich den $\mathfrak{p}_\varrho$ Komponenten, welche nach **467** mit P'_ϱ, beziehlich $\mathfrak{P}'_\varrho$ zu bezeichnen sind.

Folgerung 1. Die Energie $\mathfrak{E}$ eines cyklischen Systems 553
kann geschrieben werden in den Formen (**286**):

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2}\mathfrak{m}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma\, \mathfrak{a}_{\varrho\sigma}\,\dot{\mathfrak{p}}_\varrho\,\dot{\mathfrak{p}}_\sigma$$

$$= \frac{1}{2\mathfrak{m}}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma\, \mathfrak{b}_{\varrho\sigma}\,\mathfrak{q}_\varrho\,\mathfrak{q}_\sigma \quad ,$$

in welchen die $\mathfrak{a}_{\varrho\sigma}$ und $\mathfrak{b}_{\varrho\sigma}$ Funktionen allein der p_ϱ, nicht aber der $\mathfrak{p}_\varrho$ sind (**548**), übrigens aber dieselben Eigenschaften und denselben Zusammenhang haben, wie die $a_{\varrho\sigma}$ und $b_{\varrho\sigma}$ (**59** ff.).

Betrachten wir $\mathfrak{E}$ als Funktion der p_ϱ und der $\dot{\mathfrak{p}}_\varrho$, wie es die erste Form darstellt, so möge sein partielles Differential mit $\partial_{\mathfrak{p}}\mathfrak{E}$ bezeichnet werden; betrachten wir aber $\mathfrak{E}$ als Funk-

tion der p_ϱ und der $\mathfrak{q}_\varrho$, wie es die zweite Form darstellt, so möge sein partielles Differential mit $\partial_{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}$ bezeichnet werden (vergl. 288).

554 **Folgerung 2.** Für alle Werte des ϱ gelten die Gleichungen:

a) (289) $$\frac{\partial_{\mathfrak{p}}\mathfrak{E}}{\partial \dot{p}_\varrho} = q_\varrho = 0 \quad ,$$

b) (290) $$\frac{\partial_{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}}{\partial q_\varrho} = \dot{p}_\varrho = 0 \quad ,$$

c) $$\frac{\partial_{\mathfrak{p}}\mathfrak{E}}{\partial \mathfrak{p}_\varrho} = 0 \quad ,$$

d) $$\frac{\partial_{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}}{\partial \mathfrak{p}_\varrho} = 0 \quad .$$

Diese Gleichungen enthalten die charakteristischen Merkmale der cyklischen Systeme, und auf ihnen beruhen die besonderen Eigentümlichkeiten derselben.

Die Gleichung **b)** wiederholt die Bemerkung (550), dafs ein Widerspruch besteht zwischen der Annahme, dafs die Form der Energie genau die angenommene sei und dafs gleichwohl die p_ϱ mit der Zeit veränderliche Gröfsen seien. Wir haben die Gleichung gemäfs 551 dahin zu deuten, dafs, wenn $\mathfrak{E}$ sehr angenähert die gewählte Gestalt hat, die p_ϱ als langsam sich verändernde Gröfsen betrachtet werden müssen.

Kräfte und Kräftefunktion.

555 **Aufgabe 1.** Die Kraft P'_ϱ zu bestimmen, welche das cyklische System nach seinem Parameter p_ϱ ausübt.

Zufolge der Gleichungen **493c, d** und **554a** erhalten wir:

a) $$P'_\varrho = \frac{\partial_{\mathfrak{p}}\mathfrak{E}}{\partial p_\varrho} = -\frac{\partial_{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}}{\partial p_\varrho}$$

oder in entwickelter Form:

$$P'_\varrho = \frac{1}{2}\mathfrak{m}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\tau \frac{\partial \mathfrak{a}_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho}\dot{\mathfrak{p}}_\sigma \dot{\mathfrak{p}}_\tau \qquad \text{b)}$$

$$= -\frac{1}{2\mathfrak{m}}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\tau \frac{\partial \mathfrak{b}_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho}\mathfrak{q}_\sigma \mathfrak{q}_\tau \quad . \qquad \text{c)}$$

Folgerung. Die Kräfte eines cyklischen Systems nach seinen Parametern sind unabhängig von den Änderungsgeschwindigkeiten dieser Parameter. 556

Vorausgesetzt ist jedoch immer, dafs diese Änderungsgeschwindigkeiten nicht dasjenige Mafs übersteigen, welches erlaubt, das System als ein cyklisches zu behandeln. So sind in der Elektrodynamik die Anziehungen zwischen Magneten zwar unabhängig von der Geschwindigkeit ihrer Bewegung, aber doch nur so lange, als diese Geschwindigkeit weit unterhalb der Lichtgeschwindigkeit liegt.

Aufgabe 2. Die Kraft $\mathfrak{P}'_\varrho$ zu bestimmen, welche das 557
cyklische System nach seiner cyklischen Koordinate $\mathfrak{p}_\varrho$ ausübt.

Zufolge der Gleichungen **493c** und **554c** erhält man:

$$\mathfrak{P}'_\varrho = -\dot{\mathfrak{q}}_\varrho \quad . \qquad \text{a)}$$

Entwickelt, hat man, da (**270**)

$$\mathfrak{q}_\varrho = \mathfrak{m}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \mathfrak{a}_{\varrho\sigma}\dot{\mathfrak{p}}_\sigma \quad , \qquad \text{b)}$$

$$\mathfrak{P}'_\varrho = -\mathfrak{m}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \mathfrak{a}_{\varrho\sigma}\ddot{\mathfrak{p}}_\sigma - \mathfrak{m}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma\sum_1^{r}{}_\tau \frac{\partial \mathfrak{a}_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau}\dot{\mathfrak{p}}_\sigma \dot{p}_\tau \quad . \qquad \text{c)}$$

Folgerung. Wirkt auf ein cyklisches System eine äufsere 558
Kraft, deren Komponenten nach den $\mathfrak{p}_\varrho$ die $\mathfrak{P}_\varrho$ sind, so ändern sich die cyklischen Momente nach den Gleichungen:

$$\dot{\mathfrak{q}}_\varrho = \mathfrak{P}_\varrho \quad .$$

Lehrsatz. Wenn auf die cyklischen Koordinaten eines 559

cyklischen Systems keine Kräfte wirken, so sind die sämtlichen cyklischen Momente des Systems konstant in der Zeit.

Denn sind die $\mathfrak{P}_\varrho$ gleich Null, so ergeben die vorigen Gleichungen durch Integration

$$\mathfrak{q}_\varrho = \text{constans} \quad .$$

560 **Definition.** Eine Bewegung eines cyklischen Systems, bei welcher seine cyklischen Momente konstant bleiben, heifst eine adiabatische Bewegung. Eine Bewegung eines cyklischen Systems, bei welcher seine cyklischen Intensitäten konstant bleiben, heifst eine isocyklische Bewegung.

Adiabatisch, beziehlich isocyklisch wird das cyklische System selbst genannt, wenn es gezwungen ist, keine anderen Bewegungen auszuführen, als nur adiabatische, beziehlich isocyklische.

561 **Anmerkung 1.** Die analytische Bedingung der adiabatischen Bewegung ist diese, dafs für alle ϱ:

$$\dot{\mathfrak{q}}_\varrho = 0 \quad , \qquad \mathfrak{q}_\varrho = \text{constans}$$

sei. Die analytische Bedingung der isocyklischen Bewegung ist diese, dafs für alle ϱ:

$$\ddot{\mathfrak{p}}_\varrho = 0 \quad , \qquad \dot{\mathfrak{p}}_\varrho = \text{constans}$$

sei.

562 **Anmerkung 2.** Die Bewegung eines cyklischen Systems ist eine adiabatische, sobald auf die cyklischen Koordinaten dauernd keine Kräfte wirken. Die Bewegung eines cyklischen Systems ist eine isocyklische, wenn es nach den cyklischen Koordinaten mit anderen Systemen gekoppelt ist, welche konstante Änderungsgeschwindigkeit der gekoppelten Koordinaten besitzen. Damit die Bewegung eine isocyklische sei, müssen also geeignete Kräfte auf die cyklischen Koordinaten wirken.

563 **Definition.** Lassen sich die Kräfte eines cyklischen Systems nach seinen Parametern darstellen als die partiellen

Differentialquotienten einer Funktion der Parameter und konstanter Gröſsen, nach den Parametern, so heiſst diese Funktion die Kräftefunktion des cyklischen Systems.

Lehrsatz. Sowohl für die adiabatische, als auch für die 564
isocyklische Bewegung besteht eine Kräftefunktion.

Denn für die adiabatische Bewegung folgt aus **555c**:

$$P'_\varrho = -\frac{\partial}{\partial p_\varrho}\sum_1^r{}_\sigma\sum_1^r{}_\tau\, \mathfrak{b}_{\sigma\tau}\frac{\mathfrak{q}_\sigma\mathfrak{q}_\tau}{2\mathfrak{m}} \quad , \qquad \text{a)}$$

und hierin sind die Gröſsen $\mathfrak{q}_\sigma\mathfrak{q}_\tau/\mathfrak{m}$ Konstanten und die $\mathfrak{b}_{\sigma\tau}$ Funktionen lediglich der Parameter.

Entsprechend folgt für die isocyklische Bewegung aus **555b**:

$$P'_\varrho = \frac{\partial}{\partial p_\varrho}\sum_1^r{}_\sigma\sum_1^r{}_\tau\, \mathfrak{a}_{\sigma\tau}\frac{\mathfrak{m}}{2}\dot{\mathfrak{p}}_\sigma\dot{\mathfrak{p}}_\tau \quad , \qquad \text{b)}$$

und hierin sind wiederum die Gröſsen $\mathfrak{m}\dot{\mathfrak{p}}_\sigma\dot{\mathfrak{p}}_\tau$ Konstanten und die $\mathfrak{a}_{\sigma\tau}$ Funktionen lediglich der Parameter.

Anmerkung. Die Kräftefunktion für die adiabatische 565
und für die isocyklische Bewegung unterscheiden wir auch wohl als adiabatische bez. isocyklische Kräftefunktion. Es giebt weitere Bewegungsformen des Systems, für welche Kräftefunktionen bestehen, aber nicht für jede beliebige Bewegung besteht eine solche.

Zusatz 1. Die Kräftefunktion eines adiabatischen Systems 566
ist gleich der Abnahme der Energie des Systems, gerechnet von einem willkürlich gewählten Anfangszustand aus. Sie ist daher auch gleich einer willkürlichen, d. h. durch die Definition nicht bestimmten Konstanten, vermindert um die Energie des Systems.

Zusatz 2. Die Kräftefunktion eines isocyklischen Systems 567
ist gleich der Zunahme der Energie des Systems, gerechnet von einem willkürlich gewählten Anfangszustand aus. Sie ist daher auch gleich der Energie des Systems, vermindert um eine willkürliche Konstante.

Reciproke Eigentümlichkeiten.

568 **Lehrsatz 1a.** Wenn in einem adiabatischen System eine Vergröfserung des Parameters p_μ die Komponente der Kraft nach dem anderen Parameter p_λ steigert, so steigert auch umgekehrt eine Vergröfserung von p_λ die Kraft nach p_μ. Und zwar ist bei unendlich kleiner Vergröfserung das quantitative Verhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche.

Denn in einem adiabatischen System können wir die p_ϱ als die hinreichenden unabhängigen Bestimmungsstücke der P'_ϱ betrachten, und es liefert uns daher die für adiabatische Systeme gültige Gleichung **564a**:

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial p_\mu} = \frac{\partial P'_\mu}{\partial p_\lambda} \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

569 **Lehrsatz 1b.** Wenn in einem isocyklischen System eine Vergröfserung des Parameters p_μ die Komponente der Kraft nach dem anderen Parameter p_λ steigert, so steigert auch umgekehrt eine Vergröfserung von p_λ die Kraft nach p_μ. Und zwar ist bei unendlich kleiner Vergröfserung das quantitative Verhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche.

Denn auch in einem isocyklischen System können wir die p_ϱ als hinreichende unabhängige Bestimmungsstücke der P'_ϱ ansehen, und es liefert uns daher die für isocyklische Systeme gültige Gleichung **564b**:

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial p_\mu} = \frac{\partial P'_\mu}{\partial p_\lambda} \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Es ist zu bemerken, dafs diese Gleichung von der vorigen dem Sinne nach verschieden, wenn auch der Form nach identisch ist.

570 **Anmerkung.** Damit die vorstehenden beiden Lehrsätze eine physikalische Anwendung gestatten, genügt es, dafs von

dem cyklischen System zwei Parameter und die Kräfte nach diesen der unmittelbaren Beobachtung zugänglich seien.

Lehrsatz 2a. Wenn in einem cyklischen System eine Vermehrung des cyklischen Momentes $\mathfrak{q}_\mu$ bei festgehaltenen Parametern eine Steigerung der Kraft nach dem Parameter p_λ zur Folge hat, so ruft die adiabatische Vergröfserung des Parameters p_λ eine Verminderung der cyklischen Intensität $\dot{\mathfrak{p}}_\mu$ hervor, und umgekehrt. Und zwar ist bei unendlich kleiner Änderung das Grössenverhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche. 571

Denn wir haben:

$$P'_\lambda = -\frac{\partial_\mathfrak{q}\mathfrak{E}}{\partial p_\lambda} \qquad (555\text{a}) \quad , \qquad \dot{\mathfrak{p}}_\mu = \frac{\partial_\mathfrak{q}\mathfrak{E}}{\partial \mathfrak{q}_\mu} \qquad (290) \quad ,$$

also ist

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial \mathfrak{q}_\mu} = -\frac{\partial \dot{\mathfrak{p}}_\mu}{\partial p_\lambda} \ , \qquad \text{a)}$$

von welcher Gleichung der Lehrsatz die richtige Interpretation ist.

Folgerung. Wenn in einem monocyklischen System eine Vermehrung der cyklischen Intensität $\dot{\mathfrak{p}}$ bei festgehaltenen Parametern eine Steigerung der Kraft nach dem Parameter p_λ zur Folge hat, so ruft die adiabatische Vergröfserung des Parameters p_λ eine Verminderung der cyklischen Intensität $\dot{\mathfrak{p}}$ hervor, und umgekehrt. 572

Denn in einem monocyklischen System geht Vermehrung der cyklischen Intensität und Vermehrung des cyklischen Momentes bei festgehaltenen Parametern stets Hand in Hand. Für ein monocyklisches System ist nämlich

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{m}\mathfrak{a}\dot{\mathfrak{p}} \quad ,$$

worin $\mathfrak{a}$ eine notwendig positive (62) Funktion der Parameter des Systems ist.

Lehrsatz 2b. Wenn in einem cyklischen System eine Vermehrung der cyklischen Intensität $\dot{\mathfrak{p}}_\mu$ bei festgehaltenen 573

Parametern eine Steigerung der Kraft nach dem Parameter p_λ zur Folge hat, so ruft die isocyklische Vergröſserung des Parameters p_λ eine Vermehrung des cyklischen Momentes $\mathfrak{q}_\mu$ hervor, und umgekehrt. Und zwar ist bei unendlich kleiner Änderung das Grössenverhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche.

Denn wir haben:

$$P'_\lambda = \frac{\partial_\mathfrak{p} \mathfrak{E}}{\partial p_\lambda} \quad (555\,\text{a}) \quad , \qquad \mathfrak{q}_\mu = \frac{\partial_\mathfrak{p} \mathfrak{E}}{\partial \dot{\mathfrak{p}}_\mu} \quad (289) \quad ,$$

also ist:

a)
$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial \dot{\mathfrak{p}}_\mu} = \frac{\partial \mathfrak{q}_\mu}{\partial p_\lambda} \quad ,$$

von welcher Gleichung der Lehrsatz den Ausdruck in Worten giebt.

574 **Folgerung.** Wenn in einem monocyklischen System eine Vermehrung des cyklischen Momentes $\mathfrak{q}$ bei festgehaltenen Parametern eine Steigerung der Kraft nach dem Parameter p_λ zur Folge hat, so ruft die isocyklische Vergröſserung des Parameters p_λ eine Vermehrung des cyklischen Momentes $\mathfrak{q}$ hervor, und umgekehrt.

Der Grund ist derselbe wie in **572**.

575 **Anmerkung.** Die vorstehenden Lehrsätze 2a und 2b gestatten eine physikalische Anwendung dann, wenn es möglich ist, neben einer cyklischen Intensität auch das entsprechende cyklische Moment unmittelbar, d. h. ohne Kenntnis der Koefficienten $\mathfrak{a}_{\varrho\sigma}$, zu bestimmen. Dies kann eintreten. In der Elektrostatik entsprechen z. B. die Potentialdifferenzen der Leiter den cyklischen Intensitäten, die Elektricitätsmengen der Leiter den cyklischen Momenten, und beide Gröſsen können unabhängig von einander unmittelbar bestimmt werden.

Die Folgerungen verlangen nur die unmittelbare Bestimmbarkeit entweder der cyklischen Intensität oder des cyklischen Momentes.

576 **Lehrsatz 3a.** Wenn in einem cyklischen System eine auf die cyklische Koordinate $\mathfrak{p}_\mu$ ausgeübte Kraft ein zeitliches Anwachsen der Kraft nach dem Parameter p_λ zur Folge hat, so

ruft die adiabatische Vergröſserung des Parameters p_λ eine Verminderung der cyklischen Intensität $\dot{\mathfrak{p}}_\mu$ hervor, und umgekehrt. Und zwar ist bei unendlich kleiner Änderung das Grössenverhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche.

Denn denken wir uns in der linken Seite der Gleichung **571a** die Änderungen $\partial P'_\lambda$ und $\partial \mathfrak{q}_\mu$ entstanden in der Zeit dt, dividieren wir den Differentialquotienten im Zähler und Nenner durch diese Zeit dt, und beachten die Gleichung **558**, indem wir die Änderung $\partial \mathfrak{q}_\mu$ als Wirkung der Kraft $\mathfrak{P}_\mu$ ansehen, so folgt:

$$\frac{\dot{P}'_\lambda}{\mathfrak{P}_\mu} = -\frac{\partial \dot{\mathfrak{p}}_\mu}{\partial p_\lambda} \quad ,$$

von welcher Gleichung der Lehrsatz den vervollständigten Ausdruck in Worten giebt.

Lehrsatz 3b*). Wenn in einem cyklischen System eine Vermehrung der cyklischen Intensität $\dot{\mathfrak{p}}_\mu$ bei festgehaltenen Parametern eine Steigerung der Kraft nach dem Parameter p_λ zur Folge hat, so ruft die isocyklische Vergröſserung des Parameters p_λ eine Verminderung der Kraft des Systems nach der cyklischen Koordinate $\mathfrak{p}_\mu$ hervor, und umgekehrt. Und zwar ist bei unendlich kleiner Änderung das Gröſsenverhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche. **577**

Denken wir uns in der rechten Seite der Gleichung **573a** die Änderungen $\partial \mathfrak{q}_\mu$ und ∂p_λ entstanden in der Zeit dt, so können wir setzen:

$$\partial \mathfrak{q}_\mu = \frac{d}{dt}\partial \mathfrak{q}_\mu \cdot dt = \partial \dot{\mathfrak{q}}_\mu \, dt = -\partial \mathfrak{P}'_\mu \, dt \qquad \textbf{(557a)} \; ,$$

$$\partial p_\lambda = \frac{d}{dt}\partial p^\lambda \cdot dt = \partial \dot{p}_\lambda \, dt \quad ;$$

es wird also jene Gleichung:

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial \dot{\mathfrak{p}}_\mu} = -\frac{\partial \mathfrak{P}'_\mu}{\partial \dot{p}_\lambda} \quad ,$$

welche Aussage der Lehrsatz in Worten wiedergiebt.

* Mit dem Originale übereinstimmender Abdruck. — Der Herausgeber.

578 **Anmerkung.** Die Lehrsätze 3a und 3b gestatten die physikalische Anwendung dann, wenn neben einer cyklischen Intensität auch die entsprechende cyklische Kraftkomponente der unmittelbaren Beobachtung zugänglich ist. Dies trifft zum Beispiel für die Elektrodynamik zu, und man versinnlicht sich die Bedeutung der Lehrsätze 3a und 3b am besten, indem man sie in die Redeweise dieses Zweiges der Physik übersetzt.

Energie und Arbeit.

579 **Lehrsatz 1.** Bei der isocyklischen Bewegung eines cyklischen Systems ist die Arbeit, welche das System durch die Koppelung seiner cyklischen Koordinaten aufnimmt, beständig das Doppelte der Arbeit, welche es durch die Koppelung seiner Parameter abgiebt.

Bei der isocyklischen Bewegung ist $\ddot{\mathfrak{p}}_\varrho$ für alle ϱ gleich Null, also nach **514** und **557c** die Arbeit, welche die auf die cyklischen Koordinaten wirkenden äufseren Kräfte in der Zeiteinheit leisten, gleich:

$$-\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\, \mathfrak{P}'_\varrho \dot{\mathfrak{p}}_\varrho = \mathfrak{m}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \sum_1^{r}{}_\tau \frac{\partial \mathfrak{a}_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} \dot{\mathfrak{p}}_\sigma \dot{p}_\tau \dot{\mathfrak{p}}_\varrho \quad .$$

Die Arbeit aber, welche das System durch seine Kräfte nach den Parametern leistet, berechnet auf die Zeiteinheit, wird gefunden mit Hülfe von **555b** gleich:

$$\sum_1^{r}{}_\varrho\, P'_\varrho \dot{p}_\varrho = \frac{1}{2}\mathfrak{m}\sum_1^{r}{}_\varrho \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\tau \frac{\partial \mathfrak{a}_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} \dot{\mathfrak{p}}_\sigma \dot{\mathfrak{p}}_\tau \dot{p}_\varrho \quad .$$

Die Summen in beiden Gleichungen sind bis auf die Bezeichnung identisch, und die Glieder der ersten Gleichung sind daher doppelt so grofs als die der letzten.

580 **Folgerung.** Wenn ein isocyklisches System durch die Kräfte nach seinen Parametern Arbeit leistet, so wächst gleichzeitig die Energie des Systems, und zwar um den Betrag der geleisteten Arbeit; wenn ein isocyklisches System durch die

Kräfte nach seinen Parametern Arbeit aufnimmt, so nimmt gleichzeitig die Energie des Systems ab, und zwar um den Betrag der aufgenommenen Arbeit.

Denn die Zunahme der Energie des Systems ist gleich dem Unterschiede der von den cyklischen Koordinaten aufgenommenen und der durch die Parameter abgegebenen Arbeit.

Anmerkung. Wenn ein adiabatisches System durch die Kräfte nach seinen Parametern Arbeit leistet, so nimmt gleichzeitig die Energie des Systems ab, und zwar um den Betrag der geleisteten Arbeit; wenn ein adiabatisches System durch die Kräfte nach seinen Parametern Arbeit aufnimmt, so wächst gleichzeitig die Energie des Systems, und zwar um den Betrag der aufgenommenen Arbeit. 581

Denn in einem adiabatischen System wird durch die cyklischen Koordinaten keine Arbeit aufgenommen (562).

Lehrsatz 2. Bei der adiabatischen Verrückung eines cyklischen Systems erleiden die cyklischen Intensitäten stets Änderungen in solchem Sinne, dafs die von diesen Änderungen hervorgerufenen Kräfte nach den Parametern bei der Verrückung negative Arbeit leisten. 582

Es mögen bei der Verrückung die p_ϱ die Änderungen δp_ϱ und die Intensitäten $\dot{\mathfrak{p}}_\varrho$ die Änderungen $\delta\dot{\mathfrak{p}}_\varrho$ erleiden. Fänden nur die letzteren Änderungen statt, so würden sich die Kräfte P'_ϱ ändern um die Beträge (555 b):

$$\delta P'_\varrho = \mathfrak{m} \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\tau \frac{\partial \mathfrak{a}_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} \dot{\mathfrak{p}}_\sigma \, \delta\dot{\mathfrak{p}}_\tau \quad ,$$

und diese $\delta P'_\varrho$ sind es, welche der Lehrsatz als die von den $\delta\dot{\mathfrak{p}}_\tau$ hervorgerufenen Kräfte bezeichnet. Die von ihnen geleistete Arbeit ist gleich:

$$\sum_1^{r}{}_\varrho \, \delta P'_\varrho \delta p_\varrho = \mathfrak{m} \sum_1^{r}{}_\varrho \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\tau \frac{\partial \mathfrak{a}_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} \dot{\mathfrak{p}}_\sigma \, \delta\dot{\mathfrak{p}}_\tau \, \delta p_\varrho$$

$$= \mathfrak{m} \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\tau \, \delta \mathfrak{a}_{\sigma\tau} \, \dot{\mathfrak{p}}_\sigma \, \delta\dot{\mathfrak{p}}_\tau \quad ,$$

und die Behauptung geht dahin, daſs diese Arbeit notwendig negativ sei. Nun ist aber für die adiabatische Bewegung:

$$\mathfrak{q}_\tau = \mathfrak{m} \sum_1^\tau {}_\sigma\, \mathfrak{a}_{\sigma\tau}\, \dot{\mathfrak{p}}_\sigma = \text{constans} \quad ,$$

also:

$$\sum_1^\tau {}_\sigma\, \delta\mathfrak{a}_{\sigma\tau}\, \dot{\mathfrak{p}}_\sigma = -\sum_1^\tau {}_\sigma\, \mathfrak{a}_{\sigma\tau}\, \delta\dot{\mathfrak{p}}_\sigma \quad .$$

Bilden wir diese Gleichungen für alle τ, multiplizieren sie der Reihe nach mit $\mathfrak{m}\delta\dot{\mathfrak{p}}_\tau$ und addieren, so erhalten wir links den vorigen Ausdruck für die betrachtete Arbeit, rechts eine notwendig negative Gröſse (62), womit die Behauptung erwiesen ist.

583 **Folgerung.** Bei der adiabatischen Verrückung eines cyklischen Systems erleiden die cyklischen Intensitäten stets Änderungen in solchem Sinne, daſs die von diesen Änderungen hervorgerufenen Kräfte die erzeugende Bewegung aufzuhalten streben.

Dies ist in der That nur eine andere Form, den vorigen Lehrsatz auszusagen. Sie entspricht der Ausdrucksweise der Lenz'schen Regel in der Elektrodynamik.

584 **Bemerkung.** Bei jeder unendlich kleinen Bewegung eines monocyklischen Systems verhält sich die durch die cyklische Koordinate aufgenommene Arbeit zur Energie des Systems, wie der doppelte Zuwachs, welchen das cyklische Moment des Systems erfährt, zu diesem Moment.

Denn die während der Zeit dt durch die cyklische Koordinate $\mathfrak{p}$ aufgenommene Arbeit $d\mathfrak{Q}$ ist gleich:

$$d\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}\, d\mathfrak{p} = \dot{\mathfrak{q}}\, d\mathfrak{p} = \dot{\mathfrak{q}}\, \dot{\mathfrak{p}}\, dt = \dot{\mathfrak{p}}\, d\mathfrak{q} \quad ,$$

während die Energie $\mathfrak{E}$ geschrieben werden kann:

$$\mathfrak{E} = \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{q}\, \dot{\mathfrak{p}} \quad .$$

Also ist:

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{\mathfrak{E}} = 2\frac{d\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}} \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Folgerung 1. Bei beliebiger Bewegung eines mono- 585
cyklischen Systems ist der Ausdruck

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{\mathfrak{E}}$$

das vollständige Differential einer Funktion der Parameter und der cyklischen Intensität des Systems, nämlich der Funktion

$$2 \log \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}_0} \quad ,$$

in welcher $\mathfrak{q}_0$ das cyklische Moment für eine willkürlich gewählte Anfangslage bedeutet. Diese Funktion wird auch die Entropie des monocyklischen Systems genannt.

Folgerung 2. Der Wert des für eine beliebige endliche 586
Bewegung eines monocyklischen Systems gebildeten Integrales

$$\int \frac{d\mathfrak{Q}}{\mathfrak{E}}$$

hängt nur ab von den Zuständen des Systems in der Anfangs- und Endlage der Bewegung, nicht aber von den zwischen beiden Lagen durchlaufenen Zuständen. Der Wert jenes Integrales wird Null für jede Bewegung, welche das System zu seinem Anfangszustand zurückführt.

Denn der Wert jenes Integrales ist gleich dem Unterschiede der Entropie im Anfangs- und im Endzustande der Bewegung.

Folgerung 3. Bei der adiabatischen Bewegung eines 587
monocyklischen Systems bleibt die Entropie konstant. Denn für die adiabatische Bewegung ist $\mathfrak{P}$, also auch $d\mathfrak{Q}$ gleich Null. Die adiabatische Bewegung eines monocyklischen Systems wird deshalb auch eine isentropische genannt.

Zeitintegral der Energie.

Bemerkung 1. Ändern sich bei der adiabatischen Be- 588
wegung eines cyklischen Systems die cyklischen Koordinaten $\mathfrak{p}_\varrho$

in einer gewissen endlichen Zeit um die Beträge $\bar{\mathfrak{p}}_\varrho$, so ist das Zeitintegral der Energie des Systems, genommen über jene Zeit, gleich

$$\frac{1}{2}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\, \mathfrak{q}_\varrho\, \bar{\mathfrak{p}}_\varrho \quad .$$

Denn es kann die Energie des Systems geschrieben werden in der Form (**286b**):

$$\frac{1}{2}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\, \mathfrak{q}_\varrho\, \dot{\mathfrak{p}}_\varrho \quad ,$$

und hierin sind für die adiabatische Bewegung die $\mathfrak{q}_\varrho$ Konstanten.

589 **Bemerkung 2.** Die Variation des Zeitintegrales der Energie eines adiabatischen Systems bei variierter Bewegung des Systems hängt ab erstens von der Variation der Parameter während der ganzen Zeit, über welche das Integral gebildet ist, zweitens aber auch von den in der Zeit konstanten Variationen, welche die in der Zeit konstanten cyklischen Momente des Systems erleiden.

590 **Bezeichnung.** Wir bezeichnen im folgenden:

mit δ eine Variation, bei welcher die cyklischen Momente willkürliche Variationen erleiden,

mit $\delta_{\mathfrak{q}}$ eine Variation, bei welcher die cyklischen Momente keine Variationen erleiden,

endlich mit $\delta_{\mathfrak{p}}$ eine Variation, bei welcher die cyklischen Momente solche Variationen erleiden, daſs die Anfangs- und Endwerte der cyklischen Koordinaten unvariiert bleiben.

591 **Folgerung.** Aus der Bezeichnung folgt von selbst für alle ϱ:

$$\delta_{\mathfrak{q}}\mathfrak{q}_\varrho = 0 \quad , \quad \delta_{\mathfrak{p}}\bar{\mathfrak{p}}_\varrho = 0 \quad ,$$

also wird nach 588 für beliebige Variationen der Parameter:

$$\delta_{\mathfrak{q}} \int \mathfrak{E}\, dt = \frac{1}{2} \sum_1^{\mathfrak{r}} {}^{\varrho}\, \mathfrak{q}_\varrho\, \delta_{\mathfrak{q}} \bar{\mathfrak{p}}_\varrho \qquad \text{a)}$$

$$\delta_{\mathfrak{p}} \int \mathfrak{E}\, dt = \frac{1}{2} \sum_1^{\mathfrak{r}} {}^{\varrho}\, \bar{\mathfrak{p}}_\varrho\, \delta_{\mathfrak{p}} \mathfrak{q}_\varrho \quad . \qquad \text{b)}$$

Anmerkung. In einem adiabatischen System ist es stets, 592
und zwar im allgemeinen nur auf eine Weise möglich, bei beliebiger Variation der Parameter den cyklischen Momenten solche Variationen zu erteilen, dafs die Anfangs- und Endwerte der cyklischen Koordinaten unvariiert bleiben.

Denn aus der allgemeinen Beziehung:

$$\dot{\mathfrak{p}}_\varrho = \frac{1}{\mathfrak{m}} \sum_1^{\mathfrak{r}} {}^{\sigma}\, \mathfrak{b}_{\varrho\sigma}\, \mathfrak{q}_\sigma$$

folgt für ein adiabatisches System, in welchem sich die $\mathfrak{p}_\varrho$ von den Werten $\mathfrak{p}_{\varrho_0}$ auf die Werte $\mathfrak{p}_{\varrho_1}$ ändern:

$$\mathfrak{p}_{\varrho_1} - \mathfrak{p}_{\varrho_0} = \frac{1}{\mathfrak{m}} \sum_1^{\mathfrak{r}} {}^{\sigma}\, \mathfrak{q}_\sigma \int_0^1 \mathfrak{b}_{\varrho\sigma}\, dt \quad ,$$

also bei beliebiger Variation der Parameter und der cyklischen Momente:

$$\delta\mathfrak{p}_{\varrho_1} - \delta\mathfrak{p}_{\varrho_0} = \frac{1}{\mathfrak{m}} \sum_1^{\mathfrak{r}} {}^{\sigma}\, \mathfrak{q}_\sigma\, \delta \int_0^1 \mathfrak{b}_{\varrho\sigma}\, dt + \frac{1}{\mathfrak{m}} \sum_1^{\mathfrak{r}} {}^{\sigma}\, \delta\mathfrak{q}_\sigma \int_0^1 \mathfrak{b}_{\varrho\sigma}\, dt \quad .$$

Diese Gleichungen aber bilden $\mathfrak{r}$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $\mathfrak{r}$ Gröfsen $\delta\mathfrak{q}_\sigma$, welche also stets eine und zwar im allgemeinen nur eine Lösung zulassen, insbesondere auch dann, wenn die links stehenden Variationen verschwinden.

Variationen der Art, welche wir mit $\delta_{\mathfrak{p}}$ bezeichneten, sind also auch bei beliebiger Variation der Parameter stets möglich.

Lehrsatz. Bei gleicher, übrigens willkürlicher Variation 593
der Parameter während einer gewissen Zeit fällt die Variation

des Zeitintegrales der Energie in einem adiabatischen System entgegengesetzt gleich aus, wenn man das eine Mal die cyklischen Momente des Systems unvariiert läfst, das andere Mal sie so variiert, dafs Anfangs- und Endwerte der cyklischen Koordinaten unvariiert bleiben.

Denn für eine beliebige Variation ist:

$$\delta\int \mathfrak{E}\, dt = \delta_{\mathfrak{q}}\int \mathfrak{E}\, dt + \sum_{1}^{\mathfrak{r}}{}_{\varrho} \int \frac{\partial_{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}}{\partial \mathfrak{q}_{\varrho}}\, \delta \mathfrak{q}_{\varrho}\, dt$$

$$= \delta_{\mathfrak{q}}\int \mathfrak{E}\, dt + \sum_{1}^{\mathfrak{r}}{}_{\varrho}\, \bar{\mathfrak{p}}_{\varrho}\, \delta \mathfrak{q}_{\varrho} \quad ,$$

also insbesondere für eine Variation, bei welcher Anfangs- und Endwerte der $\mathfrak{p}_{\varrho}$ unvariiert bleiben:

$$\delta_{\mathfrak{p}}\int \mathfrak{E}\, dt = \delta_{\mathfrak{q}}\int \mathfrak{E}\, dt + \sum_{1}^{\mathfrak{r}}{}_{\varrho}\, \bar{\mathfrak{p}}_{\varrho}\, \delta_{\mathfrak{p}} \mathfrak{q}_{\varrho} \quad .$$

Subtrahiert man hiervon zweimal die Gleichung **591b**, so folgt:

$$\delta_{\mathfrak{q}}\int \mathfrak{E}\, dt = -\,\delta_{\mathfrak{p}}\int \mathfrak{E}\, dt \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Man vergleiche übrigens die verwandten Sätze **96** und **293**.

II. Verborgene cyklische Bewegung.

Erläuterungen und Definitionen.

594 1. Wir sagen, ein System enthalte verborgene Massen, wenn durch die der Beobachtung zugänglichen Koordinaten des Systems noch nicht die Lage aller Massen des Systems bestimmt ist, sondern nur die Lage eines Teiles derselben.

595 2. Diejenigen Massen, deren Lage bei vollständiger Angabe der beobachtbaren Koordinaten des Systems dennoch unbekannt bleibt, heifsen verborgene Massen, ihre Bewegungen

verborgene Bewegungen, ihre Koordinaten verborgene Koordinaten. Im Gegensatz dazu heifsen die übrigen Massen des Systems sichtbare Massen, ihre Bewegungen sichtbare Bewegungen, ihre Koordinaten sichtbare Koordinaten.

3. Die Aufgabe, welche der Mechanik in Hinsicht der 596
Systeme mit verborgenen Massen zufällt, ist diese: die Bewegungen der sichtbaren Massen des Systems oder auch die Veränderungen der sichtbaren Koordinaten des Systems vorauszubestimmen trotz der vorhandenen Unkenntnis über die Lage der verborgenen Massen.

4. Ein System, welches verborgene Massen enthält, unter- 597
scheidet sich von einem System ohne verborgene Massen allein in Hinsicht unserer Kenntnis des Systems. Alle bisherigen Aussagen unserer Mechanik bleiben daher anwendbar auf Systeme mit verborgenen Bewegungen, sobald wir unter den Massen, Koordinaten u. s. w. die sämtlichen Massen, Koordinaten u. s. w. verstehen. Erst dann werden Änderungen nötig, wenn wir unsere Aussagen auf die sichtbaren Gröfsen beschränken wollen. Die zu stellende Aufgabe kann daher auch dahin formuliert werden, dafs anzugeben sei, welche Änderungen die bisherigen Aussagen unserer Mechanik erleiden müssen, wenn unter den Massen, Koordinaten u. s. w. schlechthin nur die sichtbaren Massen, Koordinaten u. s. w. verstanden werden.

5. Es ist klar, dafs die in der einen oder der anderen 598
Form gestellte Aufgabe nicht zu lösen ist ohne gewisse Angaben über den Einflufs, welchen die verborgenen Massen auf die Bewegung der sichtbaren Massen ausüben. Solche Angaben aber sind möglich. Ein geleitetes System oder ein von Kräften beeinflufstes System kann bereits als ein System mit verborgenen Massen aufgefafst werden, indem man die unbekannten Massen des leitenden Systems oder des beeinflussenden Systems als verborgene ansieht. Im allgemeinen ist es indessen in diesen Fällen möglich, auch die Massen des leitenden oder des Kräfte ausübenden Systems physikalisch zu erkennen, und die Auffassung derselben als verborgener ist alsdann eine freiwillige. Jetzt indessen fassen wir vorwiegend solche Fälle ins Auge, in welchen die Erkenntnis der ver-

borgenen Massen in der That durch keine physikalische Beobachtung möglich ist.

599 6. In sich zurücklaufende Bewegungen, also cyklische Bewegungen, sind häufig verborgene Bewegungen, da sie, allein bestehend, eine Änderung in der Massenverteilung, also im Anblick der Welt, nicht hervorrufen. So ist die Bewegung einer homogenen Flüssigkeit in einem geschlossenen Gefäfse für den Anblick eine verborgene; sie wird erst sichtbar gemacht, wenn ihr durch Einbringen von Staub oder dergleichen die Eigenschaft der streng cyklischen Bewegung geraubt wird.

Umgekehrt sind verborgene Bewegungen fast stets cyklische Bewegungen. Nicht in sich zurücklaufende Bewegungen führen nämlich stets über kurz oder lang eine gröfsere Änderung in der Massenverteilung, also im Anblick der Welt hervor und werden dadurch sichtbar.

600 7. Auch cyklische Bewegungen können ihre Verborgenheit nicht lange bewahren, sobald wir Mittel gewinnen, auf die einzelnen cyklischen Koordinaten zu wirken und die cyklischen Intensitäten beliebig abzuändern. Die Mannigfaltigkeit unseres Einflusses auf das System ist in diesem Falle ebenso grofs wie die wirkliche Mannigfaltigkeit des Systems, und wir können von jener auf diese schliefsen. Anders aber verhält es sich, wenn ein freiwilliger unmittelbarer Einflufs auf die cyklischen Koordinaten dauernd ausgeschlossen ist. Dies kann eintreten in adiabatischen cyklischen Systemen (560), und in diesen werden wir daher vorzugsweise die für unsere Beobachtung dauernd verborgenen Bewegungen zu suchen haben.

Auf solche Fälle beschränken wir daher zunächst die Betrachtung der verborgenen Bewegung. Unsere Behandlungsart aber bringt es mit sich, dafs wir auch in diesen Fällen die verborgene Bewegung so behandeln, als wäre sie sichtbar, und erst nachträglich untersuchen, welche unserer Aussagen anwendbar bleiben trotz der nunmehr vorausgesetzten Verborgenheit.

Konservative Systeme.

Definition 1. Ein materielles System, welches keine anderen verborgenen Massen enthält, als solche, welche adiabatische cyklische Systeme bilden, heifst ein konservatives System. 601

Der Name ist veranlafst durch eine Eigenschaft solcher Systeme, welche später hervortreten wird; er ist zunächst durch den Anschlufs an den feststehenden Gebrauch der Mechanik genügend gerechtfertigt.

Anmerkung. Jedes konservative System kann betrachtet werden als bestehend aus zwei Teilsystemen, von denen das eine alle sichtbaren Massen, das andere alle verborgenen Massen des ganzen Systems enthält. Die Koordinaten des sichtbaren Teilsystems, also die sichtbaren Koordinaten des ganzen Systems, sind zugleich die Parameter des verborgenen Teilsystems. 602

Wir bezeichnen dauernd die Masse des sichtbaren Teilsystems mit m, seine Koordinaten mit p_ϱ, seine Momente nach den p_ϱ mit q_ϱ. Die Masse des verborgenen Teilsystems werde mit $\mathfrak{m}$ bezeichnet, seine Koordinaten mit $\mathfrak{p}_\varrho$, seine Momente nach diesen mit $\mathfrak{q}_\varrho$.

Definition 2. Unter der Kräftefunktion eines konservativen Systems verstehen wir die Kräftefunktion seines verborgenen Teilsystems (563). 603

Die Kräftefunktion eines konservativen Systems ist also im allgemeinen gegeben als Funktion der sichtbaren Koordinaten und konstanter Gröfsen, ohne dafs der Zusammenhang dieser Konstanten mit den Momenten des cyklischen Teilsystems offen gegeben sei. Die Form dieser Funktion ist durch unsere Betrachtungen keiner Einschränkung unterworfen.

Wir bezeichnen die Kräftefunktion des konservativen Systems dauernd mit U.

Bemerkung. Damit die Bewegung der sichtbaren Massen eines konservativen Systems vollständig bestimmt sei, genügt es, dafs seine Kräftefunktion gegeben sei als Funktion seiner sichtbaren Koordinaten, und es macht diese Angabe jede weitere Angabe über die verborgenen Massen des Systems entbehrlich. 604

Denn aus der Kräftefunktion in der angegebenen Form folgen vollständig die Kräfte, welche das verborgene Teilsystem auf das sichtbare ausübt, und diese Kräfte vertreten vollständig den Einflufs des ersteren auf das letztere (**457** ff.).

605 **Definition 3.** Derjenige Teil der Energie eines konservativen Systems, welcher von der Bewegung seiner sichtbaren Massen herrührt, heifst die kinetische Energie des ganzen Systems. Im Gegensatz dazu wird die Energie der verborgenen Massen die potentielle Energie des ganzen Systems genannt.

Die kinetische Energie wird auch wohl als lebendige Kraft bezeichnet; nach einer anderen, älteren Redeweise wird das Doppelte der kinetischen Energie mit diesem Namen belegt.

606 **Bezeichnung.** Wir bezeichnen die kinetische Energie dauernd mit T. T ist demnach eine homogene quadratische Funktion der $\dot{p}_\varrho$, mit gleichem Rechte der q_ϱ; die Koefficienten dieser Funktion sind Funktionen der p_ϱ. Mit $\partial_p T$ bezeichnen wir das partielle Differential von T, sobald wir die p_ϱ und die $\dot{p}_\varrho$ als unabhängig von einander veränderliche Variabele betrachten, mit $\partial_q T$ aber dann, wenn wir die p_ϱ und die q_ϱ als unabhängig von einander veränderliche Variabele betrachten.

Die Energie des verborgenen cyklischen Teilsystems, also die potentielle Energie des ganzen Systems, möge unter Beibehaltung einer bereits benutzten Bezeichnung (**553**) mit $\mathfrak{E}$ bezeichnet werden.

607 **Anmerkung.** Die kinetische und die potentielle Energie eines konservativen Systems unterscheiden sich von einander nicht durch ihre Natur, sondern nur durch den freiwilligen Standpunkt unserer Auffassung, oder die unfreiwillige Beschränkung unserer Kenntnis von den Massen des Systems. Dieselbe Energie, welche bei einem gewissen Stand unserer Auffassung oder unserer Kenntnis als potentielle zu bezeichnen ist, ist bei verändertem Stand unserer Auffassung oder Kenntnis als kinetische anzusprechen.

608 **Folgerung 1.** Die Energie eines konservativen Systems ist gleich der Summe seiner kinetischen und seiner potentiellen Energie.

Wir bezeichnen die Gesamtenergie des konservativen Systems dauernd mit E und haben alsdann:

$$E = T + \mathfrak{E} \quad .$$

Folgerung 2. In einem freien konservativen System ist die Summe der potentiellen und der kinetischen Energie konstant in der Zeit; die kinetische Energie wächst nur auf Kosten der potentiellen, und umgekehrt (**340**). **609**

Folgerung 3. In einem freien konservativen System ist die Differenz zwischen kinetischer Energie und Kräftefunktion konstant in der Zeit; kinetische Energie und Kräftefunktion nehmen gleichzeitig zu und ab und zwar um gleiche Beträge (**566**). **610**

Definition 4. Die Differenz zwischen kinetischer Energie und Kräftefunktion eines konservativen Systems nennen wir die mathematische oder analytische Energie des Systems. **611**

Wir bezeichnen die mathematische Energie dauernd mit h. Sie unterscheidet sich von der Energie des Systems nur durch eine von Zeit und Lage des Systems unabhängige, im allgemeinen aber unbekannte Konstante. Für die mathematische Anwendung kann sie die Energie vollständig vertreten, es fehlt ihr aber die physikalische Bedeutung, welche diese besitzt.

Anmerkung. Die Definition wird wiedergegeben durch die Gleichung: **612**

$$T - U = h \quad , \qquad \textbf{a)}$$

oder in anderer Schreibart:

$$U + h = T \quad . \qquad \textbf{b)}$$

Ist das konservative System ein freies, so ist in dieser Gleichung die Gröfse h eine von der Zeit unabhängige Konstante, und die Gleichung wird alsdann auch wohl als die Gleichung der Energie für das konservative System bezeichnet.

Aus **b)** und **608** leiten wir noch die Beziehung her:

$$U + h = E - \mathfrak{E} \quad . \qquad \textbf{c)}$$

613 **Definition 5.** Das Zeitintegral der kinetischen Energie eines Systems, genommen zwischen zwei bestimmten Zeiten als Grenzen, wird die Wirkung oder der Kraftaufwand während der Zwischenzeit genannt.

Die Wirkung bei der Bewegung eines konservativen Systems während einer gegebenen Zeit wird also dargestellt durch das Integral

$$\int T dt \quad ,$$

genommen zwischen dem Anfangs- und dem Endwerte jener Zeit.

614 **Anmerkung 1.** Bezeichnet ds das Bahnelement des sichtbaren Teilsystems, v die Geschwindigkeit desselben in seiner Bahn, so kann die Wirkung auch dargestellt werden in der Form des Integrals

$$\frac{1}{2} m \int v \, ds \quad ,$$

genommen zwischen den Lagen, in welchen sich das System zu Anfang und zu Ende der betrachteten Zeit befindet.

615 **Anmerkung 2.** Der Name „Wirkung“ für das in Rede stehende Integral ist oft als unpassend verurteilt worden. Es ist aber nicht wohl einzusehen, warum der von Jacobi vorgeschlagene Name „Kraftaufwand“ besser wäre, noch auch was der ursprünglich von Maupertuis gewählte Ausdruck „action“ vor jenen voraushabe. Alle diese Benennungen erwecken Vorstellungen, welche mit dem benannten Gegenstande nichts zu schaffen haben. Es ist auch schwer verständlich, wie die Summation der zu verschiedenen Zeiten vorhandenen Energieen etwas anderes liefern könne, als eine Rechnungsgröfse, und es ist daher wohl nicht nur schwierig, sondern unmöglich, für das in Rede stehende Integral eine passende Bezeichnung von einfachem Sinne zu finden.

Auch die übrigen in diesem Abschnitt eingeführten Namen und Bezeichnungen sind weniger durch die innere Zweckmäfsigkeit gerechtfertigt, als durch die Notwendigkeit, uns der bestehenden Redeweise der Mechanik so viel als möglich anzuschliefsen.

Differentialgleichungen der Bewegung.

Aufgabe. Die Differentialgleichungen der Bewegung eines konservativen Systems aufzustellen. 616

Die Lösung der Aufgabe besteht nur in der Angabe der Bewegungsgleichungen für das sichtbare Teilsystem. Die Masse dieses Teilsystems ist m, seine Koordinaten sind die p_ϱ; es seien die k Gleichungen:

$$\sum_1^r{}_\varrho \, p_{\varkappa\varrho} \, dp_\varrho = 0 \qquad \textbf{a)}$$

seine Bedingungsgleichungen. Da die p_ϱ zugleich die Parameter des verborgenen Teilsystems sind, so sind die Komponenten der Kräfte, welche dieses auf das sichtbare Teilsystem ausübt, gleich $\partial U / \partial p_\varrho$ (563). Wirkt auf das sichtbare Teilsystem durch Koppelung mit anderen sichtbaren Systemen noch eine weitere Kraft, so mögen deren Komponenten P_ϱ sein. Dann sind die Bewegungsgleichungen des Systems nach 481:

$$m f_\varrho + \sum_1^k{}_\varkappa \, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = \frac{\partial U}{\partial p_\varrho} + P_\varrho \quad , \qquad \textbf{b)}$$

und diese r Gleichungen zusammen mit den k Gleichungen **a)** reichen wieder aus zur eindeutigen Bestimmung der $r+k$ Gröfsen $\ddot{p}_\varrho$ und $P_\varkappa$.

Anmerkung 1. Ist das betrachtete konservative System ein freies, wirkt also auf dasselbe keine äufsere Kraft, so sind die P_ϱ gleich Null, und die Bewegungsgleichungen haben die Form: 617

$$m f_\varrho + \sum_1^k{}_\varkappa \, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = \frac{\partial U}{\partial p_\varrho} \quad .$$

Anmerkung 2. Ist insbesondere die Koordinate p_ϱ eine freie Koordinate des sichtbaren Teilsystems, so nimmt die dem Index ϱ zugehörige Bewegungsgleichung die Form an: 618

$$mf_\varrho = \frac{\partial U}{\partial p_\varrho} \quad ,$$

da die $p_{\varkappa\varrho}$ alsdann sämtlich verschwinden.

619 **Anmerkung 3.** Indem wir in die Gleichungen 616 bis 618 für die Beschleunigungen nach den p_ϱ ihre verschiedenen Ausdrücke nach 291 einsetzen, erhalten wir für diese Gleichungen eine Reihe verschiedener Formen, welche den Formen entsprechen, welche wir für ein vollständig bekanntes System in 368 u. ff. erhalten haben.

620 **Folgerung 1.** Sind in einem holonomen konservativen System die p_ϱ sämtlich freie Koordinaten, und setzen wir zur Abkürzung:

$$T + U = L \quad ,$$

so lassen sich die Bewegungsgleichungen des Systems darstellen in der Form der $2r$ Gleichungen:

a) $$q_\varrho = \frac{\partial_p L}{\partial \dot{p}_\varrho}$$

b) $$\dot{q}_\varrho = \frac{\partial_p L}{\partial p_\varrho} \quad ,$$

welche als ebensoviele Differentialgleichungen erster Ordnung für die $2r$ Gröfsen p_ϱ und q_ϱ aufgefafst werden können, und welche zusammen mit bestimmten Anfangswerten den Verlauf dieser Gröfsen eindeutig bestimmen.

Denn setzen wir den Wert von L ein, entwickeln die partiellen Differentialquotienten, und beachten, dafs U die $\dot{p}_\varrho$ nicht enthält, dafs also

$$\frac{\partial_p U}{\partial \dot{p}_\varrho} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial_p U}{\partial p_\varrho} = \frac{\partial U}{\partial p_\varrho}$$

ist, so erkennen wir, dafs die Gleichungen **a)** mit der aus den Definitionen folgenden Beziehung der q_ϱ und der $\dot{p}_\varrho$ zusammenfallen, die Gleichungen **b)** aber mit den Bewegungsgleichungen in der Form 618. (289, 291)

Anmerkung. Die Funktion L, durch deren Benutzung die 621
Differentialgleichungen der Bewegung die einfache Form der Gleichungen **620a** und **b** annehmen, hat man bisweilen die LAGRANGE'sche Funktion des Systems genannt. Diese Funktion besteht also nur in einem holonomen System, und sie ist hier gleich der Differenz der kinetischen und der potentiellen Energie, abgesehen von einer willkürlich bleibenden Konstanten.

Folgerung 2. Sind in einem holonomen konservativen 622
System die p_ϱ sämtlich freie Koordinaten, und setzen wir zur Abkürzung:

$$T - U = H \quad ,$$

so lassen sich die Bewegungsgleichungen des Systems darstellen in der Form der $2r$ Gleichungen:

$$\dot{p}_\varrho = \frac{\partial_q H}{\partial q_\varrho} \qquad \textbf{a)}$$

$$\dot{q}_\varrho = -\frac{\partial_q H}{\partial p_\varrho} \quad , \qquad \textbf{b)}$$

welche als ebensoviele Differentialgleichungen erster Ordnung für die $2r$ Gröfsen p_ϱ und q_ϱ aufgefafst werden können, und welche zusammen mit bestimmten Anfangswerten den Verlauf dieser Gröfsen eindeutig bestimmen.

Denn setzen wir den Wert von H ein, und beachten, dafs U die q_ϱ nicht enthält, dafs also:

$$\frac{\partial_q U}{\partial q_\varrho} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial_q U}{\partial p_\varrho} = \frac{\partial U}{\partial p_\varrho}$$

ist, so sehen wir, dafs die Gleichungen **a)** die aus den Definitionen folgende Beziehung der q_ϱ und der $\dot{p}_\varrho$ darstellen, während die Gleichungen **b)** mit den aus der Erfahrung abgeleiteten Bewegungsgleichungen (**618**) des Systems zusammenfallen. (**290**, **294**)

Anmerkung. Die Funktion H, durch deren Benutzung die 623
Differentialgleichungen der Bewegung die einfache Gestalt der

Gleichungen **622a** und **b** annehmen, hat man wohl die HAMILTON'sche Funktion des Systems genannt. Diese Funktion besteht also nur für ein holonomes System, und sie ist für ein solches gleich der Summe der kinetischen und der potentiellen Energie, abgesehen von einer willkürlich bleibenden Konstanten; sie ist also auch gleich der Gesamtenergie des Systems, von einer willkürlichen Konstanten abgesehen.

Allgemein ist es zulässig, für ein System mit beliebigen, nicht notwendig cyklischen, verborgenen Bewegungen die HAMILTON'sche Funktion zu definieren durch die Gleichungen **622a** und **b**, nämlich als eine Funktion der sichtbaren p_ϱ und q_ϱ, durch deren Benutzung (vorausgesetzt, dafs es eine solche Funktion giebt) die Bewegungsgleichungen eben jene einfache Form annehmen. Bei dieser allgemeineren Definition ist die HAMILTON'sche Funktion nicht immer gleich der Summe der kinetischen und der potentiellen Energie.

624 **Bemerkung.** Aus den Gleichungen **620** und **622** können für ein System mit verborgenen Cykeln dieselben reciproken Eigenschaften der Bewegung abgeleitet werden, welche wir für ein vollständig bekanntes System in **378** und **381** abgeleitet haben. Es ist aber diese neue Ableitung nicht erforderlich, sondern es liegt schon im Wesen jener Beziehungen, dafs jede von ihnen Gültigkeit hat unabhängig davon, ob die in ihnen nicht vorkommenden Koordinaten, Momente, u. s. w. sichtbare oder verborgene Koordinaten, Momente, u. s. w. sind.

Integralsätze für holonome Systeme.

625 **Bemerkung 1.** Das Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} (T-U)\, dt$$

ist beim Übergang eines freien holonomen Systems mit verborgenen adiabatischen Cykeln zwischen hinreichend benachbarten Lagen 0 und 1 kleiner für die natürliche Bewegung des Systems, als für jede andere mögliche Bewegung, welche in der gleichen

Zeit sowohl die sichtbaren, als auch die verborgenen Koordinaten aus den Anfangswerten in die Endwerte überführt.

Denn da $T-U$ gleich ist der Energie des Systems, vermehrt um eine für alle möglichen Bewegungen gleiche Konstante (**611**), so ist die Bemerkung nichts anderes, als der Lehrsatz **358**, ausgesagt unter Anwendung der gegenwärtigen Bezeichnung.

Anmerkung 1. Wird die Beschränkung auf hinreichend **626**
benachbarte Endlagen weggelassen, so kann nur behauptet werden, dafs die Variation des Integrals verschwindet beim Übergang zu irgend einer anderen der in Betracht kommenden Bewegungen. Unter Anwendung der Bezeichnung **590** nimmt alsdann die Aussage die Form an, dafs

$$\delta_{\mathfrak{p}} \int_{t_0}^{t_1} (T-U)\, dt = 0$$

sei beim Übergang von der natürlichen Bewegung zu irgend einer anderen möglichen, während die Variationen der Anfangs- und Endzeiten und der Anfangs- und Endwerte der sichtbaren Koordinaten verschwinden. (Vergl. **359**.)

Anmerkung 2. Die Bemerkung 1 unterscheidet die natür- **627**
lichen Bewegungen eindeutig von jeder anderen möglichen Bewegung, und sie kann daher dazu dienen, die natürliche Bewegung zu bestimmen, sobald es möglich ist, die Variation der Anmerkung 1 wirklich zu bilden. Sind aber, wie wir es ja voraussetzen, die cyklischen Koordinaten verborgene, so ist die Bildung der Variationen der Form $\delta_{\mathfrak{p}}$ nicht möglich, und der Satz verliert daher nicht zwar seine Richtigkeit, wohl aber seine Anwendbarkeit.

Lehrsatz 1. Das Integral **628**

$$\int_{t_0}^{t_1} (T+U)\, dt$$

ist beim Übergang eines freien holonomen Systems mit verborgenen adiabatischen Cykeln zwischen hinreichend benachbarten Lagen seiner sichtbaren Massen kleiner für die natür-

liche Bewegung, als für irgend eine andere mögliche Bewegung, welche in der gleichen Zeit und mit denselben Momenten der verborgenen cyklischen Bewegungen die sichtbaren Koordinaten aus den gegebenen Anfangswerten in die gegebenen Endwerte überführt.

Wir führen den Beweis, indem wir den Satz auf die Bemerkung **625** zurückführen. Wir ordnen deshalb, wie es nach **592** möglich ist, einer jeden nach den Ansprüchen des Lehrsatzes variierten Bewegung eine zweite zu, bei welcher die sichtbaren Koordinaten dieselbe Variation erleiden, bei welcher aber die cyklischen Momente so variieren, dafs die Anfangs- und Endwerte der cyklischen Koordinaten die ursprünglichen bleiben. Eine Variation beim Übergang zu einer Bewegung der ersten Art haben wir nach **590** mit $\delta_{\mathfrak{q}}$, eine Variation zu der entsprechenden Bewegung zweiter Art mit $\delta_{\mathfrak{p}}$ zu bezeichnen.

Nun ist erstens, da T nur von den sichtbaren Koordinaten abhängt:

a)
$$\delta_{\mathfrak{q}}\int T\,dt = \delta_{\mathfrak{p}}\int T\,dt \quad .$$

Zweitens ist, da die Dauer der Bewegung nicht variiert wird und $-U$ sich nur durch eine Konstante von der Energie der cyklischen Bewegung unterscheidet (**566**), zufolge von **593**:

b)
$$\delta_{\mathfrak{q}}\int U\,dt = -\,\delta_{\mathfrak{p}}\int U\,dt \quad .$$

Durch Addition von **a)** und **b)** ergiebt sich:

c)
$$\delta_{\mathfrak{q}}\int (T+U)\,dt = \delta_{\mathfrak{p}}\int (T-U)\,dt \quad .$$

Die rechts stehende Variation aber hat (**626**, **625**) für die natürliche Bewegung stets einen verschwindenden und für hinreichend benachbarte Endlagen notwendig negativen Wert, also auch die links stehende Variation. Das links stehende Integral selbst hat also für die natürliche Bewegung und hinreichend benachbarte Endlagen einen Minimalwert, welches die Behauptung ist.

629 **Anmerkung 1.** Wird die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Lagen weggelassen, so kann nur noch behauptet

werden, dafs die Variation des Integrales verschwindet. Der analytische Ausdruck dieser Behauptung ist in unserer Bezeichnungsweise (im Gegensatz zu der Aussage von 626):

$$\delta_q \int_{t_0}^{t_1} (T+U)\, dt = 0 \quad .$$

Anmerkung 2. Die in dem Lehrsatz ausgesprochene Eigenschaft der natürlichen Bewegung unterscheidet dieselbe eindeutig von jeder anderen möglichen Bewegung. Die Variation δ_q kann gebildet werden, obwohl die cyklischen Bewegungen als verborgene angesehen sind, denn ihre Bildung erfordert nur, dafs man die in der Kräftefunktion vorkommenden Konstanten unvariiert lasse. Der Lehrsatz kann deshalb benutzt werden zur Bestimmung der natürlichen Bewegung konservativer Systeme. Seine Gültigkeit ist allerdings streng beschränkt auf holonome Systeme. 630

Anmerkung 3. Der vorstehende Lehrsatz, benutzt in der Auffassung der Anmerkung 2, führt den Namen des HAMILTON'schen Prinzips. Seine physikalische Bedeutung kann nach unserer Anschauung keine andere sein, als die des Lehrsatzes 358, aus welchem wir das Prinzip hergeleitet haben. Das Prinzip selbst stellt die Umformung dar, welche wir jenem Satze 358 geben müssen, damit er trotz unserer Unkenntnis der Einzelheiten der cyklischen Bewegung zur Bestimmung der Bewegung des sichtbaren Systems anwendbar bleibe. 631

Bemerkung 2. Bezeichnen wir mit ds das Bahnelement der sichtbaren Massen eines freien holonomen Systems, welches verborgene adiabatische Cykeln enthält, so ist das Integral 632

$$\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}}$$

beim Übergang zwischen hinreichend benachbarten Lagen 0 und 1 kleiner für die natürlichen Bahnen des Systems, als für irgend welche andere mögliche Bahnen, welche sowohl die

Werte der sichtbaren, als auch die Werte der cyklischen Koordinaten aus den gegebenen Anfangswerten in die gegebenen Endwerte überführen. Die Gröſse h ist dabei als eine von einer natürlichen Bahn zur anderen wechselnde, übrigens für alle jedesmal verglichenen Bahnen gleiche Konstante zu betrachten.

Denn führen wir die Zeit als Hülfsgröſse ein und machen dabei die willkürliche aber zulässige Annahme, das System durchlaufe die betrachteten Bahnen mit konstanter Geschwindigkeit, und zwar mit solcher Geschwindigkeit, daſs die Konstante h den Wert der analytischen Energie bezeichnet, so ist:

a) $$T = U + h = \frac{1}{2} m \frac{ds^2}{dt^2} \quad ,$$

also das betrachtete Integral gleich:

$$\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{t_0}^{t_1} dt \quad .$$

Das Integral ist also, von dem Faktor abgesehen, gleich der Zeitdauer des Überganges. Diese ist aber nach **352** als Folge von **347** für gegebenen Wert der Energie, also der Konstanten h, ein Minimum. Unsere Bemerkung ist demnach nichts anderes, als der Inhalt des Lehrsatzes 352, ausgesagt unter Benutzung der inzwischen eingeführten Bezeichnungen.

633 **Anmerkung 1.** Wird die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Lagen fortgelassen, so kann nur noch das Verschwinden einer Variation behauptet werden (**353**); welche Aussage in unserer Bezeichnung in der Form darzustellen ist:

$$\delta_{\mathfrak{p}} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}} = 0 \quad .$$

634 **Anmerkung 2.** Durch die Eigenschaft, welche die Bemerkung 2 aussagt, sind die natürlichen Bahnen, welche den verschiedenen Werten der Konstanten h entsprechen, eindeutig ausgezeichnet vor jeder anderen möglichen Bahn, und der Lehr-

satz kann daher zur Bestimmung der natürlichen Bahnen des Systems dienen, sobald es möglich ist, die Variation $\delta_{\mathfrak{p}}$ zu bilden. Sind aber, wie wir voraussetzen, die Einzelheiten der cyklischen Bewegung verborgen, so ist diese Bildung nicht möglich, und die Bemerkung verliert daher nicht zwar ihre Richtigkeit, wohl aber ihre Anwendbarkeit zu dem beregten Zwecke.

Lehrsatz 2*). Beim Übergang eines freien holonomen Systems, welches verborgene adiabatische Cykeln enthält, zwischen zwei hinreichend benachbarten Lagen 0 und 1 der sichtbaren Massen, ist das Integral 635

$$\int_0^1 \sqrt{U+h}\, ds$$

kleiner für die natürlichen Bahnen, als für irgend welche andere mögliche Bahnen, welche mit denselben Werten der verborgenen cyklischen Momente und der Konstanten h die sichtbaren Koordinaten aus den gegebenen Anfangswerten in die gegebenen Endwerte überführen.

Wir führen wiederum den Beweis des Satzes, indem wir ihn auf die vorangegangene Bemerkung (632) zurückführen. Zu dem Ende benutzen wir wieder die Zeit als Hülfsgrösse, indem wir die willkürliche aber zulässige Annahme machen, dass das System die betrachteten Bahnen mit konstanter und solcher Geschwindigkeit durchlaufe, dass die Konstante h gleich der mathematischen Energie wird. Es lässt sich dann das Integral, von dem der Lehrsatz handelt, schreiben in der Form:

$$\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{t_0}^{t_1} (U+h)\, dt \; .$$

Ferner ordnen wir wieder, wie es nach 592 zulässig ist, einer jeden nach der Vorschrift des Lehrsatzes variierten Bewegung eine zweite zu, bei welcher die sichtbaren Koordinaten dieselbe Variation erleiden, für welche auch die Konstante h,

* Mit dem Originale übereinstimmender Abdruck. — Der Herausgeber.

(635) und also auch die Energie E ihren Wert behält, bei welcher aber die cyklischen Momente so variieren, dass die Anfangs- und Endwerte der cyklischen Koordinaten die ursprünglichen bleiben. Eine Variation, wie sie den Ansprüchen des Lehrsatzes entspricht, bezeichnen wir wieder mit $\delta_{\mathfrak{q}}$, eine Variation zu der entsprechenden zweiten Bewegung mit $\delta_{\mathfrak{p}}$.

Nun ist erstens für beliebige Variationen $\delta\mathfrak{q}_\varrho$ der cyklischen Momente $\mathfrak{q}_\varrho$ (**566**):

$$\delta\int(U+h)\,dt = \delta_{\mathfrak{q}}\int(U+h)\,dt + \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\int\frac{\partial(U+h)}{\partial\mathfrak{q}_\varrho}\,\delta\mathfrak{q}_\varrho\,dt$$

$$= \delta_{\mathfrak{q}}\int(U+h)\,dt - \frac{1}{2}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\,\bar{\mathfrak{p}}_\varrho\,\delta\mathfrak{q}_\varrho \quad ,$$

also im besonderen für eine Variation $\delta_{\mathfrak{p}}$:

a) $$\delta_{\mathfrak{p}}\int(U+h)\,dt = \delta_{\mathfrak{q}}\int(U+h)\,dt - \frac{1}{2}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\,\bar{\mathfrak{p}}_\varrho\,\delta_{\mathfrak{p}}\mathfrak{q}_\varrho \quad .$$

Zweitens erhalten wir aus Gleichung **612c** unter Berücksichtigung der Beziehung **588** und der Konstanz von E:

$$\int(U+h)\,dt = E(t_1-t_0) - \frac{1}{2}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\,\bar{\mathfrak{p}}_\varrho\,\mathfrak{q}_\varrho \quad ,$$

also durch eine Variation der Art $\delta_{\mathfrak{p}}$:

b) $$\delta_{\mathfrak{p}}\int(U+h)\,dt = E\,\delta_{\mathfrak{p}}(t_1-t_0) - \frac{1}{2}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\,\bar{\mathfrak{p}}_\varrho\,\delta_{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{q}_\varrho \quad .$$

Durch Subtraktion von **a)** und **b)** ergiebt sich:

c) $$\delta_{\mathfrak{q}}\int(U+h)\,dt = E\,\delta_{\mathfrak{p}}(t_1-t_0) \ ,$$

oder indem wir mit Hülfe von **632a** die Zeit wieder eliminieren:

d) $$\delta_{\mathfrak{q}}\int_0^1\sqrt{U+h}\,ds = E\,\delta_{\mathfrak{p}}\int_0^1\frac{ds}{\sqrt{U+h}} \quad .$$

Die rechts stehende Variation aber hat nach **632** für die natürliche Bewegung stets einen verschwindenden und für hinreichend benachbarte Endlagen negativen Wert, also, da E notwendig positiv ist, auch die links stehende Variation. Das links stehende Integral selbst hat also für die natürliche Bewegung und hinreichend benachbarte Endlagen einen Minimalwert, welches die Behauptung ist.

Anmerkung 1. Wird die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Lagen weggelassen, so kann nur noch behauptet werden, dafs die Variation des Integrales verschwindet. Der analytische Ausdruck dieser Behauptung ist in unserer Bezeichnungsweise (im Gegensatz zu **633**): **636**

$$\delta_q \int_0^1 \sqrt{U+h}\, ds = 0 \quad .$$

Anmerkung 2. Für jeden Wert der Konstanten h zeichnet der Lehrsatz eine natürliche Bahn in eindeutiger Weise aus vor jeder anderen möglichen Bahn. Die Eigenschaft der natürlichen Bahnen, welche der Lehrsatz aussagt, kann daher benutzt werden zur Bestimmung dieser Bahnen; und zwar kann sie benutzt werden, obwohl die cyklischen Bewegungen als verborgene vorausgesetzt sind. **637**

Denn die Bildung der Variation δ_q erfordert nur, dafs man die in der Kräftefunktion vorkommenden Konstanten unvariiert lasse; die Variation kann also gebildet werden trotz Unkenntnis der Einzelheiten der cyklischen Bewegung.

Anmerkung 3. Der Lehrsatz 2, benutzt in der Auffassung der Anmerkung 2, ist die Jacobi'sche Form des Prinzips der kleinsten Wirkung. Denn nennen wir für den Augenblick m_ν die Masse des ν ten der sichtbaren n Punkte des Systems, ds_ν das Element der Bahn dieses Punktes, so ist **638**

$$m\, ds^2 = \sum_1^n{}_\nu\, m_\nu\, ds_\nu^2 \quad ,$$

und also das Integral, für welches wir einen Minimalwert feststellten, bis auf einen Faktor:

$$\int \sqrt{U+h} \sqrt{\sum_1^n{}_\nu m_\nu \, ds_\nu^2} \quad ,$$

welches, wiederum bis auf einen konstanten Faktor, das JACOBI'sche Integral ist.

Die physikalische Bedeutung des JACOBI'schen Prinzipes kann nach unserer Auffassung keine andere sein, als die des Lehrsatzes **352**, bez. **347**, aus welchem es abgeleitet ist; es stellt die Umformung dar, welche wir jenem Satze geben müssen, damit er trotz vorhandener Unkenntnis der Einzelheiten der cyklischen Bewegungen zur Bestimmung der Bewegung des sichtbaren Systems anwendbar bleibe. Die Gültigkeit auch des JACOBI'schen Satzes erstreckt sich nur auf holonome Systeme.

639 **Lehrsatz 3.** Beim Übergang eines freien holonomen konservativen Systems zwischen hinreichend benachbarten Lagen ist das Zeitintegral der kinetischen Energie kleiner für die natürliche Bewegung, als für jede andere mögliche Bewegung, welche das System von den gegebenen Anfangswerten zu den Endwerten der sichtbaren Koordinaten überführt, und welche mit demselben gegebenen, in der Zeit konstanten Werte der mathematischen Energie ausgeführt wird.

Denn nennen wir h den gegebenen Wert der mathematischen Energie, so ist für alle in Betracht kommenden Bahnen (**611**)

$$T - U = h \quad ,$$

also ist das Integral, von welchem der Satz handelt, nämlich

$$\int_{t_0}^{t_1} T \, dt \quad ,$$

bis auf einen konstanten Faktor dasselbe Integral, von welchem der Lehrsatz 2 handelt; der gegenwärtige Satz ist daher nur eine andere Form, den Inhalt jenes Lehrsatzes auszusagen.

Die zu dem Lehrsatz 2 gemachten Anmerkungen 1 und 2 finden daher auch hier sinnentsprechende Anwendung.

Anmerkung. Der Lehrsatz 639 giebt die ursprüngliche MAUPERTUIS'sche Form des Prinzips der kleinsten Wirkung. Diese Form hat vor der JACOBI'schen den Vorzug, daſs sie sich in einfachen Worten aussprechen läſst und daher einen einfachen physikalischen Sinn zu enthalten scheint. Sie hat aber gegenüber der JACOBI'schen Form den Nachtheil, daſs sie unnötigerweise die Zeit enthält, obwohl doch die eigentliche Aussage nur die Bahn des Systems bestimmt, nicht die Bewegung in dieser, und obwohl diese Bewegung vielmehr nur durch die hinzugefügte Bemerkung bestimmt ist, daſs überhaupt nur Bewegungen mit konstanter Energie in Betracht gezogen werden sollen. 640

Rückblick auf 625 bis 640.

1. Nach den Ergebnissen unserer Überlegung nimmt für die natürliche Bewegung eines freien konservativen Systems ein jedes der Integrale: 641

$$\int (T-U)\,dt \quad , \qquad \int (T+U)\,dt \quad ,$$

$$\int \frac{ds}{\sqrt{U+h}} \quad , \qquad \int \sqrt{U+h}\,ds \quad ,$$

$$\int T\,dt \quad ,$$

unter bestimmten Verhältnissen einen ausgezeichneten Wert an. Dabei beziehen sich die beiden oberen Integrale auf die Bewegung des Systems, die übrigen in Wahrheit nur auf die Bahn desselben. Die beiden links stehenden Integrale beziehen sich auf den Fall, daſs alle, auch die cyklischen Koordinaten des Systems in Betracht gezogen werden, und daſs nur solche Lagen des Systems als gleiche gelten, bei welchen auch die letzteren Koordinaten die gleichen Werte haben. Die übrigen Integrale beziehen sich auf den Fall, daſs die cyklischen Koordinaten des Systems verborgen sind, und daſs schon solche Lagen des Systems als gleich gelten, bei welchen die sichtbaren Koordinaten gleiche Werte haben. Die Betrachtung des letzten Integrals setzt die Gültigkeit des Prinzips von der Erhaltung der Energie als zugestanden voraus;

die Betrachtung der beiden obersten Integrale läſst diese Gültigkeit folgen; die Betrachtung der beiden mittleren Integrale kann von dieser Gültigkeit unabhängig gehalten werden.

642 **2**. Die physikalische Bedeutung der beiden links stehenden Integrale ist eine äuſserst einfache; die sie betreffenden Aussagen sind unmittelbare Ausflüsse des Grundgesetzes. Die rechts stehenden Integrale haben die einfache physikalische Bedeutung verloren; aber die Aussage, daſs sie für die natürliche Bewegung ausgezeichnete Werte annehmen, stellt immer noch eine, wenn auch verwickelte und undurchsichtige Form des Grundgesetzes dar. Verwickelt und undurchsichtig ist aber die Form des Grundgesetzes hier deshalb geworden, weil das Gesetz verwickelten und undurchsichtigen Voraussetzungen angepaſst ist. Die Aussage, welche sich auf das untere Integral bezieht, hat den trügerischen Schein einer selbständigen, einfachen physikalischen Bedeutung.

Unser Beweisverfahren war nicht darauf berechnet, möglichst einfach zu sein, sondern darauf, den obigen Zusammenhang möglichst deutlich hervortreten zu lassen.

643 **3**. Daſs die Natur nicht darauf eingerichtet ist, daſs das eine oder das andere jener Integrale ein Minimum werde, geht erstens daraus hervor, daſs schon in holonomen Systemen bei ausgedehnterer Bewegung das Minimum im allgemeinen nicht eintritt, und zweitens daraus, daſs es natürliche Systeme giebt, für welche das Minimum niemals eintritt, und für welche nicht einmal die Variation jener Integrale verschwindet. Ein umfassender Ausdruck für die Gesetze der natürlichen Bewegung kann daher auch an keines jener Integrale angeknüpft werden, und hieraus nahmen wir auch das Recht her, den Schein einfacher Bedeutung des letzten Integrales für trügerisch zu halten.

Endliche Bewegungsgleichungen für holonome Systeme.

644 **Bemerkung 1.** Bezeichnen wir mit V' den Wert des Integrales

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}}\ ,$$

genommen über die natürliche Bahn zwischen zwei Wertsystemen aller Koordinaten eines freien holonomen Systems mit adiabatischen Cykeln, und gedacht als Funktion der Anfangs- und Endwerte jener Koordinaten, also der p_{ϱ_0}, p_{ϱ_1} und der $\mathfrak{p}_{\varrho_0}$, $\mathfrak{p}_{\varrho_1}$, und der Grösse h, so stellt der Ausdruck

$$V' \sqrt{\frac{2E}{m+\mathfrak{m}}}$$

die geradeste Entfernung des Systems dar. Die Bezeichnung ist dabei dieselbe, welche wir bisher in diesem Abschnitt benutzt haben.

Denn nach **632** ist V' gleich der Zeitdauer des natürlichen Übergangs zwischen den gegebenen Lagen für die mathematische Energie h. Ist also S die geradeste Entfernung beider Lagen, so ist

$$E = \frac{1}{2}(m+\mathfrak{m})\frac{S^2}{V'^2} \quad ,$$

woraus die Behauptung folgt.

Folgerung. Mit Hülfe der Funktion V' lassen sich die natürlichen Bahnen des betrachteten Systems in geschlossener Form darstellen. **645**

Denn bezeichnen wir wie bisher mit ds das Bahnelement des sichtbaren Teilsystems, weiter mit $d\mathfrak{s}$ das Bahnelement des cyklischen Teilsystems und mit $d\sigma$ das Bahnelement des vollständigen Systems, so ist

$$(m+\mathfrak{m})\,d\sigma^2 = m\,ds^2 + \mathfrak{m}\,d\mathfrak{s}^2 \quad , \qquad \text{a)}$$

also (57) bei der bisher benutzten Bezeichnung:

$$d\sigma^2 = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \frac{m}{m+\mathfrak{m}}\, a_{\varrho\sigma}\, dp_\varrho\, dp_\sigma + \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \frac{\mathfrak{m}}{m+\mathfrak{m}}\, \mathfrak{a}_{\varrho\sigma}\, d\mathfrak{p}_\varrho\, d\mathfrak{p}_\sigma \,. \qquad \text{b)}$$

Sind also schliefslich noch σ,p_ϱ und $\sigma,\mathfrak{p}_\varrho$ die Winkel, welche die Bahn des ganzen Systems mit den Koordinaten p_ϱ und $\mathfrak{p}_\varrho$ des ganzen Systems bildet, so werden die Gleichungen der

natürlichen Bahnen zufolge von **224** und **226**, nach Division beider Seiten durch einen konstanten Faktor, erhalten in der Form:

c) $$\sqrt{a_{\varrho\varrho_1}}\cos\sigma,p_{\varrho_1} = \sqrt{\frac{2E}{m}}\,\frac{\partial V'}{\partial p_{\varrho_1}}$$

d) $$\sqrt{a_{\varrho\varrho_0}}\cos\sigma,p_{\varrho_0} = -\sqrt{\frac{2E}{m}}\,\frac{\partial V'}{\partial p_{\varrho_0}}$$

e) $$\sqrt{\mathfrak{a}_{\varrho\varrho_1}}\cos\sigma,\mathfrak{p}_{\varrho_1} = \sqrt{\frac{2E}{\mathfrak{m}}}\,\frac{\partial V'}{\partial \mathfrak{p}_{\varrho_1}}$$

f) $$\sqrt{\mathfrak{a}_{\varrho\varrho_0}}\cos\sigma,\mathfrak{p}_{\varrho_0} = -\sqrt{\frac{2E}{\mathfrak{m}}}\,\frac{\partial V'}{\partial \mathfrak{p}_{\varrho_0}} \quad ,$$

und diese Gleichungen lassen sich auf je zwei Weisen so interpretieren, dafs sie die Gleichungen der natürlichen Bahnen als Differentialgleichungen erster Ordnung oder auch in endlicher Form angeben.

646 **Anmerkung.** Die vorstehenden Gleichungen **c)** bis **f)** sind richtig in jedem Falle, ob nun die cyklischen Koordinaten als beobachtbare oder als dauernd verborgene angesehen werden; aber jene Gleichungen verlieren ihre Anwendbarkeit, sobald das letztere vorausgesetzt wird. Denn alsdann ist der vollständige Ausdruck von V' nicht bekannt, und die Gleichungen lassen sich nicht entwickelt hinschreiben.

647 **Aufgabe 1.** Die vorstehenden Bewegungsgleichungen eines freien holonomen Systems so umzuformen, dafs sie ihre Anwendbarkeit behalten, auch wenn die cyklischen Bewegungen des Systems als verborgene gelten.

Wir bezeichnen mit V den Wert des Integrales

$$\sqrt{2m}\int_0^1 \sqrt{U+h}\;ds \quad ,$$

genommen über die natürliche Bahn zwischen irgend zwei Wertsystemen der s i c h t b a r e n Koordinaten. Bei Bestimmung dieser natürlichen Bahn wollen wir die in der Kräftefunktion

vorkommenden cyklischen Momente als unveränderliche Konstanten ansehen, und V soll also gedacht werden als Funktion der Anfangs- und Endwerte allein der sichtbaren Koordinaten und der Konstanten h. Nach **635d** ist nun beim Übergang von einer natürlichen Bahn zu einer anderen mit beliebig variierten sichtbaren Koordinaten: (647)

$$\delta_{\mathfrak{q}} \sqrt{2m} \int_0^1 \sqrt{U+h}\, ds = 2E\, \delta_{\mathfrak{p}} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}} \quad , \qquad \text{a)}$$

also ist auch insbesondere beim Übergang von einer natürlichen zu einer beliebigen benachbarten natürlichen Bahn:

$$\delta_{\mathfrak{q}} V = 2E\, \delta_{\mathfrak{p}} V' \quad , \qquad \text{b)}$$

also ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_1}} &= 2E \frac{\partial V'}{\partial p_{\varrho_1}} \quad , \\ \frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_0}} &= 2E \frac{\partial V'}{\partial p_{\varrho_0}} \quad . \end{aligned} \qquad \text{c)}$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen können wir die cyklischen Koordinaten aus den rechten Seiten der Gleichungen **645c** und **d** fortschaffen. Was die linken Seiten anlangt, so haben wir die Winkel $\sigma,p_\varrho^{\cdot}$ zu ersetzen durch die s,p_ϱ. Nun haben wir nach **645b** (75):

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{m}{m+\mathfrak{m}}} \sqrt{a_{\varrho\varrho}}\, d\sigma \cos \sigma,p_\varrho &= \sum_1^r{}_\sigma \frac{m}{m+\mathfrak{m}} a_{\varrho\sigma}\, dp_\sigma \\ &= \frac{m}{m+\mathfrak{m}} \sqrt{a_{\varrho\varrho}}\, ds \cos s,p_\varrho \quad , \end{aligned} \qquad \text{d)}$$

und ferner aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} U+h = T &= \frac{1}{2} m \frac{ds^2}{dt^2} \qquad \text{und} \\ E &= \frac{1}{2}(m+\mathfrak{m}) \frac{d\sigma^2}{dt^2} \end{aligned} \qquad \text{e)}$$

durch Division:

f) $$d\sigma = \sqrt{\frac{m}{m+\mathfrak{m}}}\sqrt{\frac{E}{U+h}}\,ds \quad ,$$

also aus **d)** und **f)**:

g) $$\cos\sigma,p_\varrho = \sqrt{\frac{U+h}{E}}\cos s,p_\varrho \quad .$$

Indem wir nun das Ergebnis **c)** in die rechten, das Ergebnis **g)** in die linken Seiten der umzuformenden Gleichungen einsetzen, erhalten wir die Gleichungen:

h) $$\begin{aligned}\sqrt{a_{\varrho\varrho_1}}\cos s,p_{\varrho_1} &= \frac{1}{\sqrt{2m(U+h)_1}}\frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_1}}\\ \sqrt{a_{\varrho\varrho_0}}\cos s,p_{\varrho_0} &= -\frac{1}{\sqrt{2m(U+h)_0}}\frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_0}} \quad ,\end{aligned}$$

welches die gesuchten Umformungen sind. Denn sie enthalten keine Gröſsen mehr, welche sich auf das verborgene Teilsystem beziehen, und sie lassen sich auf je zwei Weisen so interpretieren, daſs sie die natürlichen Bahnen des sichtbaren Teilsystems als Differentialgleichungen erster Ordnung oder auch in endlicher Form angeben.

648 **Anmerkung 1.** Die Funktion V enthält nicht die Zeit und giebt auch nur die natürlichen Bahnen des Systems, nicht aber die Bewegung des Systems in diesen Bahnen. Da aber die natürlichen Bahnen mit gleichbleibender Geschwindigkeit durchlaufen werden, und da wir bereits der in V vorkommenden Konstanten h die Bedeutung der analytischen Energie beilegten, so ist es leicht, die Zeit als unabhängige Variabele in die Gleichungen einzuführen. Zunächst ist die Verknüpfung der Zeit mit der bisher als unabhängige Variabele benutzten Weglänge gegeben durch die Gleichung:

a) $$\frac{\partial V}{\partial h} = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}} = t_1 - t_0 \quad .$$

Sodann erhalten wir durch Multiplikation der Gleichungen **647h** mit

$$\sqrt{2m(U+h)} = \sqrt{2mT} = m\frac{ds}{dt} \quad ,$$

und Beachtung von **75** und **270**:

$$q_{\varrho_1} = \quad \frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_1}} \quad , \qquad \text{b)}$$

$$q_{\varrho_0} = -\frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_0}} \quad . \qquad \text{c)}$$

Endlich erhalten wir für den Wert der Funktion selbst:

$$V = 2\int_{t_0}^{t_1} T\,dt \quad . \qquad \text{d)}$$

Der Form nach sind diese Gleichungen weit einfacher als die Gleichungen der vorangegangenen Aufgabe, aber jene Gleichungen haben den Vorzug, eine unabhängige Variabele weniger zu enthalten.

Anmerkung 2. Die Funktion V ist diejenige Funktion, **649**
welche von HAMILTON mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet und die charakteristische Funktion des konservativen Systems genannt worden ist. Diese Aussage steht im Einklang mit der Aussage **412**, denn unter der dort gemachten Voraussetzung, dafs alle Koordinaten sichtbare seien, geht die jetzt mit V bezeichnete Funktion in die dort mit dem gleichen Buchstaben bezeichnete Funktion über.

Übrigens erhellt, dafs die charakteristische Funktion eines Systems nach der jetzt erweiterten Definition eine Rechnungsgröfse ohne physikalische Bedeutung ist. Denn je nachdem wir gröfsere oder kleinere Teile der cyklischen Bewegungen als verborgene behandeln, können wir für dasselbe System verschiedene charakteristische Funktionen aufstellen, welche den gleichen analytischen Dienst leisten, aber für identische Übergänge des Systems verschiedene Werte besitzen.

650 **Lehrsatz.** Die charakteristische Funktion V eines konservativen Systems genügt den beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{1}{2m}\sum_1^r{}_\varrho\sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma_1}\frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_1}}\frac{\partial V}{\partial p_{\sigma_1}} = (U+h)_1 \quad ,$$

$$\frac{1}{2m}\sum_1^r{}_\varrho\sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma_0}\frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_0}}\frac{\partial V}{\partial p_{\sigma_0}} = (U+h)_0 \quad ,$$

welche den Differentialgleichungen **227** für die geradeste Entfernung entsprechen.

Denn diese Gleichungen werden erhalten durch Einsetzen der Richtungscosinus aus den Gleichungen **647h** in die Gleichung **88**, welcher diese Richtungscosinus genügen.

651 **Bemerkung 2.** Bezeichnen wir mit P' den Wert des Integrales

$$\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt \quad ,$$

genommen über die natürliche Bewegung zwischen zwei Wertsystemen der sämtlichen Koordinaten eines freien holonomen Systems mit adiabatischen Cykeln und gedacht als Funktion dieser Werte und der Zeitdauer des Übergangs, so unterscheidet sich P' von der Prinzipalfunktion des Systems (**415**) nur um das Produkt der Zeitdauer des Übergangs in eine (unbekannte) Konstante.

Denn es unterscheidet sich $T-U$ von der Energie des Systems nur um eine (unbekannte) Konstante.

652 **Folgerung.** Mit Hülfe der Funktion P' lassen sich die natürlichen Bewegungen des Systems in geschlossener Form darstellen.

In der That hindert der Unterschied zwischen P' und der in **415** definierten Prinzipalfunktion nicht die unmittelbare Anwendung der Gleichungen **414b** und **c**, so dafs wir als Bewegungsgleichungen erhalten:

$$q_{\varrho_1} = \frac{\partial P'}{\partial p_{\varrho_1}} \quad , \qquad \text{a)}$$

$$q_{\varrho_0} = -\frac{\partial P'}{\partial p_{\varrho_0}} \quad , \qquad \text{b)}$$

$$\mathfrak{q}_{\varrho_1} = \frac{\partial P'}{\partial \mathfrak{p}_{\varrho_1}} \quad , \qquad \text{c)}$$

$$\mathfrak{q}_{\varrho_0} = -\frac{\partial P'}{\partial \mathfrak{p}_{\varrho_0}} \quad . \qquad \text{d)}$$

Dagegen erfordert die Gleichung **414d** eine leichte Abänderung; an ihrer Stelle wird erhalten:

$$h = -\frac{\partial P'}{\partial t_0} = \frac{\partial P'}{\partial t_1} \quad . \qquad \text{e)}$$

Anmerkung. Die vorstehenden Gleichungen **a)** bis **d)** sind richtig in jedem Falle, ob nun alle Koordinaten in Wahrheit beobachtbar sind oder ob nicht, aber jene Gleichungen verlieren ihre Anwendbarkeit, sobald die cyklischen Bewegungen des Systems als verborgene behandelt werden. **653**

Aufgabe 2. Die vorstehenden Bewegungsgleichungen eines freien holonomen Systems so umzuformen, dafs sie ihre Anwendbarkeit behalten, auch wenn die cyklischen Bewegungen des Systems als verborgene gelten. **654**

Wir bezeichnen mit P den Wert des Integrales

$$\int_{t_0}^{t_1} (T+U)\, dt \quad ,$$

genommen für die natürliche Bewegung zwischen zwei zu den Zeiten t_0 und t_1 stattfindenden Wertsystemen der sichtbaren Koordinaten. Bei Bestimmung dieser natürlichen Bewegung sollen die in den Konstanten der Kräftefunktion enthaltenen cyklischen Momente als unabänderlich angesehen werden, und P soll also gedacht sein als Funktion allein der Anfangs- und Endwerte der sichtbaren Koordinaten und der Zeiten t_0 und t_1.

Nun gilt nach **628c** beim Übergang von einer natürlichen Bewegung zu einer beliebigen benachbarten Bewegung von gleicher Dauer die Gleichung:

$$\delta_{\mathfrak{q}}\int(T+U)\,dt=\delta_{\mathfrak{p}}\int(T-U)\,dt \quad .$$

Wenden wir diese Gleichung an auf den Übergang von einer natürlichen Bewegung zu einer benachbarten natürlichen Bewegung von gleicher Dauer, so liefert sie uns:

$$\delta_{\mathfrak{q}}P=\delta_{\mathfrak{p}}P' \quad ,$$

also:

$$\frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_0}}=\frac{\partial P'}{\partial p_{\varrho_0}} \quad , \qquad \frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_1}}=\frac{\partial P'}{\partial p_{\varrho_1}} \quad .$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen entfernen wir die verborgenen Koordinaten aus den rechten Seiten der Gleichungen **652**. Was die linken Seiten anlangt, so genügt die Bemerkung, dafs das Moment q_ϱ des gesamten Systems nach seiner Koordinate p_ϱ zugleich das Moment des sichtbaren Teilsystems nach der Gröfse p_ϱ als Koordinate dieses Teilsystems ist. Wir erhalten demnach als Bewegungsgleichungen des sichtbaren Teilsystems:

a) $$q_{\varrho_1}=\frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_1}} \quad ,$$

b) $$q_{\varrho_0}=-\frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_0}} \quad ,$$

welches die gesuchten Umformungen sind.

655 **Anmerkung 1.** Die jetzt von uns eingeführte Funktion P ist diejenige Funktion, welche von Hamilton mit dem Buchstaben S bezeichnet und die Prinzipalfunktion des konservativen Systems genannt worden ist. Diese Aussage steht im Einklang mit der Aussage **415**, denn unter der dort gemachten Voraussetzung, dafs alle Koordinaten sichtbare seien, geht die jetzt mit P bezeichnete Funktion in die dort mit dem gleichen Buchstaben belegte Funktion über.

Anmerkung 2. Der Wert der Prinzipalfunktion für einen bestimmten Übergang hängt mit dem der charakteristischen Funktion in einfacher Weise zusammen. Durch einfache Umformung wird nämlich erhalten: 656

$$\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}(2U+h)\,dt$$

$$=\sqrt{2m}\int_0^1\sqrt{U+h}\,ds-\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^1\frac{h\,ds}{\sqrt{U+h}}\quad .$$

Also ist (**647, 644**):

$$P=V-h\,(t_1-t_0)\quad , \qquad \textbf{a)}$$

wobei wir uns in der rechten Seite, in V und im zweiten Summanden, die Gröfse h als Funktion von t_1-t_0 und der p_{ϱ_0} und p_{ϱ_1} eingesetzt zu denken haben.

Umgekehrt ist also auch

$$V=P+h\,(t_1-t_0)\quad , \qquad \textbf{b)}$$

wobei wir uns in der rechten Seite, in P und im zweiten Summanden, die Gröfse t_1-t_0 als Funktion von h und der p_{ϱ_0} und p_{ϱ_1} eingesetzt zu denken haben.

Anmerkung 3. Die analytische Energie h kommt in der Prinzipalfunktion nicht vor. Doch kann sie aus derselben mit Hülfe der Gleichungen **654a, b**, **286c** und **612a** mittelbar abgeleitet werden. Sie kann aber auch unmittelbar durch P ausgedrückt werden. Denn ändern wir in der rechten Seite der Gleichung **656a** nicht die p_{ϱ_1} und p_{ϱ_0}, sondern nur t_1 und t_0, und bezeichnen mit dh die damit notwendig verbundene Änderung von h, so folgt: 657

$$dP=\frac{\partial V}{\partial h}dh-h\,d(t_1-t_0)-(t_1-t_0)\,dh\quad ,$$

also nach **648a**:

$$dP=-h\,d(t_1-t_0)\quad ,$$

woraus folgt:

$$h = -\frac{\partial P}{\partial t_1} = \frac{\partial P}{\partial t_0} \quad .$$

658 **Lehrsatz.** Die Prinzipalfunktion P eines konservativen Systems genügt den beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{1}{2m}\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \, b_{\varrho\sigma_1} \frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_1}} \frac{\partial P}{\partial p_{\sigma_1}} + \frac{\partial P}{\partial t_1} = U_1 \quad ,$$

$$\frac{1}{2m}\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \, b_{\varrho\sigma_0} \frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_0}} \frac{\partial P}{\partial p_{\sigma_0}} - \frac{\partial P}{\partial t_0} = U_0 \quad ,$$

welche den Differentialgleichungen **227** für die geradeste Entfernung entsprechen.

Denn diese Gleichungen werden erhalten, wenn man die analytische Energie h das eine Mal direkt mit Hülfe von **657**, das andere Mal indirekt mit Hülfe von **612a** und **654a, b** durch die Differentialquotienten von P ausdrückt.

Rückblick auf 644 bis 658.

659 1. In den Nummern **644** bis **658** sind vier endliche Darstellungen der Bewegung eines holonomen Systems mit adiabatischen Cykeln gegeben. In der ersten und dritten Darstellung waren alle Koordinaten des Systems als beobachtbare angesehen, in der zweiten und vierten Darstellung waren die cyklischen Koordinaten als verborgene behandelt. Die erste und zweite Darstellung, welche auf die charakteristische Funktion führte, gab im Grunde nur die Bahn des Systems und entsprach dem Prinzip der kleinsten Wirkung. Die dritte und vierte Darstellung, welche auf die Prinzipalfunktion führte, gab vollständig die Bewegung und entsprach dem Hamilton'schen Prinzip.

660 2. Alle vier Darstellungen haben denselben einfachen physikalischen Sinn und für alle ist der Grund der mathematischen Verwickelung derselbe. Der einfache physikalische

Sinn besteht in der Thatsache, daſs die natürlichen Bahnen stets geradeste Bahnen sind, und in dem rein geometrischen Zusammenhange dieser Bahnen mit der geradesten Entfernung in holonomen Systemen. Der Grund der mathematischen Verwickelung aber besteht darin, daſs wir nicht stets alle wesentlichen Bestimmungsstücke der Bewegung gleichmäſsig behandelten, sondern einige derselben als verborgene eliminierten. Wir können auch sagen, die Ungleichmäſsigkeit bestehe darin, daſs wir für einige Koordinaten die Anfangs- und Endwerte, für andere Koordinaten die Anfangsgeschwindigkeiten als Bestimmungsstücke einführten. Unsere Ableitungsweise war nicht darauf berechnet, möglichst einfach zu sein, sondern darauf, dies Verhältnis möglichst deutlich hervortreten zu lassen.

3. Man kann weitere Darstellungen der Bewegung eines holonomen Systems geben, indem man weitere Koordinaten eliminiert, oder indem man auch für die sichtbaren Koordinaten nicht die Anfangs- und Endwerte, sondern andere Gröſsen als Bestimmungsstücke einführt, oder indem man von den partiellen Differentialgleichungen **650** oder **658** ausgeht, in ähnlicher Weise, wie dies für die geradeste Entfernung in **232** u. ff. geschehen ist. Solche Darstellungen können in besonderen Fällen mathematische Vorteile bieten, wie Jacobi in umfassender Weise gezeigt hat. Je mehr man aber in dieser Richtung fortschreitet, desto mehr verbirgt sich der physikalische Sinn der Operationen hinter deren mathematischer Form, desto mehr nehmen die benutzten Funktionen den Charakter von Hülfskonstruktionen an, welchen es nicht mehr möglich ist, eine physikalische Bedeutung beizulegen. **661**

Nicht-konservative Systeme.

Erläuterungen und Bemerkungen.

1. Enthält ein materielles System keine anderen verborgenen Massen, als solche, welche in adiabatischer cyklischer Bewegung begriffen sind, so ist es bei freier Verfügung über die sichtbaren Koordinaten jederzeit möglich, Energie, welche in die Energie der verborgenen Massen übergegangen ist, in **662**

die Energie der sichtbaren Massen zurückzuverwandeln. Die einmal im System vorhandene sichtbare Energie kann also dauernd als sichtbare Energie erhalten bleiben.

Dies ist die Eigenschaft, auf Grund deren wir solche Systeme als konservative bezeichneten. Aus dem gleichen Grunde bezeichnen wir die von den verborgenen Massen solcher Systeme ausgeübten Kräfte als konservative Kräfte.

663 2. Im Gegensatz dazu werden solche Systeme, bei welchen die freie Verfügung über die sichtbaren Koordinaten nicht ausreicht, verborgene Energie jederzeit in sichtbare zurückzuverwandeln, als nicht-konservative Systeme, und die Kräfte der verborgenen Massen solcher Systeme als nicht-konservative Kräfte bezeichnet. Nicht-konservative Systeme, in welchen die Energie sich vorzugsweise aus der Energie sichtbarer Massen in die Energie der verborgenen Massen verwandelt, nicht aber umgekehrt, heifsen dissipative Systeme, und die Kräfte der verborgenen Massen solcher Systeme dissipative Kräfte.

664 3. Im allgemeinen sind die Systeme und Kräfte der Natur nicht-konservativ, sobald überhaupt verborgene Massen in Betracht kommen. Dieser Umstand ist eine notwendige Folge davon, dafs die konservativen Systeme nur Ausnahmefälle, sogar nur mit mehr oder weniger Annäherung erreichte (550) Ausnahmefälle bilden, dafs also für ein beliebig herausgegriffenes natürliches System eine unendliche Wahrscheinlichkeit dagegen spricht, dafs es ein konservatives sei. Erfahrungsmäfsig aber sind weiter die Systeme und Kräfte der Natur dissipativ, sobald überhaupt verborgene Massen in Betracht kommen. Dieser Umstand findet eine hinreichende Erklärung in der Hypothese, dafs in der Natur die Zahl der verborgenen Massen und ihrer Bewegungsfreiheiten unendlich grofs sei gegen die Zahl der sichtbaren Massen und deren sichtbarer Koordinaten, so dafs für eine beliebig herausgegriffene Bewegung eine unendliche Wahrscheinlichkeit dagegen spricht, dafs sich die Energie gerade in der besonderen und ausgezeichneten Richtung von jener grofsen Zahl von Massen auf diese ganz bestimmte kleine Zahl hin konzentriere.

665 4. Übrigens steht der Unterschied zwischen konservativen

und dissipativen Systemen und Kräften nicht in der Natur, sondern beruht lediglich auf der freiwilligen Beschränkung unserer Auffassung oder der unfreiwilligen Beschränktheit unserer Kenntnis der natürlichen Systeme. Werden alle Massen der Natur als sichtbare Massen betrachtet, so fällt jener Unterschied fort, und alle Kräfte der Natur können alsdann als konservative Kräfte bezeichnet werden.

5. Die konservativen Kräfte erscheinen im allgemeinen 666
als Differentialquotienten von Kräftefunktionen, also als solche Funktionen der sichtbaren Koordinaten der Systeme, welche unabhängig von der Zeit sind. Die nicht-konservativen Kräfte hängen aufserdem im allgemeinen von den ersten und von höheren Differentialquotienten der sichtbaren Koordinaten nach der Zeit ab. Bei jeder analytisch gegebenen Form einer Kraft beider Arten kann die Frage aufgeworfen werden, ob diese Form mit den Voraussetzungen unserer Mechanik verträglich sei, oder ihr widerspreche.

6. Auf diese letztere Frage kann im allgemeinen Ant- 667
wort nicht erteilt werden; im einzelnen ist sie nach folgenden Gesichtspunkten zu beurteilen:

1. Wenn irgend ein gesetzmäfsiges stetiges System aufgewiesen werden kann, welches Kräfte der gegebenen Form ausübt, so ist bewiesen, dafs die gegebene Form den Ansprüchen unserer Mechanik genügt.

2. Wenn die Unmöglichkeit nachgewiesen werden kann, ein solches System aufzufinden, so ist gezeigt, dafs die gegebene Form unserer Mechanik widerspricht.

3. Wenn in der Natur irgend ein System aufgewiesen werden kann, welches erfahrungsmäfsig Kräfte der gegebenen Form ausübt, so betrachten wir dadurch zunächst als bewiesen, dafs die gegebene Form mit unserer Mechanik verträglich ist.

Trifft keiner der Fälle 1. 2. 3. zu, so mufs die gestellte Frage eine offene bleiben. Sollte sich eine Form der Kraft finden, welche nach 2. zurückzuweisen wäre, nach 3. aber zugelassen werden müfste, so wäre damit die Unzulänglichkeit der Hypothese, welche unserer Mechanik zu Grunde liegt, und damit die Unzulänglichkeit dieser Mechanik selbst erwiesen.

Abschnitt 6. Von den Unstetigkeiten der Bewegung.

Erläuterungen und Bemerkungen.

668 1. Alle Systeme materieller Punkte, auf welche das Grundgesetz nach seinen Voraussetzungen überhaupt Anwendung finden kann, müssen stetige Zusammenhänge besitzen. Die Koefficienten aller Bedingungsgleichungen solcher Systeme sind also von vornherein stetige Funktionen der Lage (124). Dies hindert aber nicht, dafs diese Funktionen sich in der Nähe gewisser Lagen äufserst schnell ändern, so dafs die Gleichungen schon in sehr benachbarten Lagen endlich verschiedene Koefficienten haben.

669 2. Wenn das betrachtete System durch eine solche Lage sehr schneller Änderung hindurchgeht, so erfordert die vollständige Kenntnis seiner Bewegung die vollständige Kenntnis der Bedingungsgleichungen auch während der schnellen Änderung derselben. Gewisse Aussagen über die Bewegung aber lassen sich fällen, auch wenn die Form der Bedingungsgleichungen des Systems nur vor und hinter der Stelle ihrer schnellen Änderung gegeben ist. Beschränken wir uns auf diese Klasse von Aussagen, so ist es analytisch einfacher, auf die besondere Art der Änderung keine Rücksicht zu nehmen, und die Bedingungsgleichungen so zu behandeln, als ob ihre Koefficienten unstetig wären. In diesem Falle ist die Auffassung des Systems als eines unstetigen bedingt durch die freiwillige Beschränkung unserer Behandlung desselben.

670 3. Es kann aber auch geschehen, dafs unsere physikalischen Mittel uns zwar erlauben, den Zusammenhang eines Systems im übrigen vollständig zu erforschen, dafs sie aber nicht ausreichen, ihn zu erforschen an den Stellen der sehr schnellen Änderung, obwohl wir überzeugt sind, und etwa auch physikalisch nachweisen können, dafs dieser Zusammenhang auch hier ein stetiger ist. Trifft dies ein, so sind wir gezwungen, den Zusammenhang analytisch als einen unstetigen

darzustellen, wenn wir nicht auf eine einheitliche Darstellung desselben überhaupt verzichten wollen. In diesem Falle ist dann die Auffassung des Systems als eines unstetigen bedingt durch die unfreiwillige Beschränktheit unserer Kenntnis von dem System.

4. Sind uns umgekehrt unmittelbar analytisch die Koeffi- 671
cienten der Bedingungsgleichungen eines Systems als unstetige Funktionen der Lage gegeben, ohne Angabe, wie diese Funktionen ermittelt sind, so setzen wir voraus, dafs einer der beiden vorher erwähnten Fälle vorliege. Wir betrachten also die gegebenen Gleichungen nur als eine unvollständige und angenäherte Angabe der wahren, stetigen Form derselben. Wir nehmen also auch eo ipso an, dafs man nicht eine vollständige Bestimmung der Bewegung eines solchen Systems von uns verlange, sondern nur die Angabe derjenigen Aussagen, welche sich trotz der unvollständigen Kenntnis des Systems thun lassen unter der Voraussetzung, dafs an den Unstetigkeitsstellen der unbekannte Zusammenhang in Wirklichkeit ein stetiger sei.

5. Geht ein System mit endlicher Geschwindigkeit durch 672
eine Stelle sehr schneller Änderung hindurch, so erleiden seine Bedingungsgleichungen in verschwindender Zeit endliche Änderungen. Ist das System während des ganzen Verlaufs auch in Wirklichkeit, wie es das Grundgesetz voraussetzt, ein gesetzmäfsiges, so gewinnt es doch den Anschein, als erlitte seine Gesetzmäfsigkeit zur Zeit des Durchgangs durch jene Lage einen Bruch, ohne dafs in Wahrheit ein solcher stattfände. Ist uns also analytisch ein System gegeben, dessen im übrigen von der Zeit unabhängige Bedingungsgleichungen zu einer bestimmten Zeit in neue Formen überspringen, so betrachten wir diese Bedingungsgleichungen zu dieser Zeit nur als angenäherte Vertreter eines anderen, uns unbekannten, vielleicht viel verwickelteren, aber jedenfalls nicht nur stetigen, sondern auch gesetzmäfsigen Zusammenhangs. Wir nehmen also auch an, dafs man nicht eine vollständige Bestimmung der Bewegung des Systems von uns verlange, sondern nur die Angabe derjenigen Aussagen, welche sich trotz der vorhandenen Unkenntnis

nach dem Grundgesetz aussagen lassen unter der Voraussetzung, daſs auch zur Zeit der Unstetigkeit der wahre Zusammenhang des Systems ein stetiger und gesetzmäſsiger sei.

673 **6.** Indem wir alle Unstetigkeitslagen und -zeiten in der vorerwähnten Weise auffassen, haben wir freilich auf die Behandlung wirklich unstetiger Systeme verzichtet. Auf solche würde auch das Grundgesetz eine Anwendung gar nicht gestatten. Einen Verzicht auf die Behandlung irgendwelcher natürlicher Systeme bedeutet aber diese Einschränkung nicht, da alles uns zu der Annahme berechtigt, daſs in der Natur wohl scheinbare, aber keine wirklichen Unstetigkeiten vorkommen. Daſs der Durchgang der Systeme durch scheinbare Unstetigkeitslagen nicht vollständig durch das Grundgesetz allein bestimmt ist, entspricht auch vollständig der physikalischen Erfahrung, daſs die Kenntnis eines Systems vor und hinter einer Unstetigkeitsstelle nicht hinreicht, um die Änderung der Bewegung beim Durchgang durch die Stelle vollständig zu ermitteln.

Von der Stoſskraft oder dem Stoſs.

674 **Bemerkung.** Durchläuft ein System eine Unstetigkeitslage, so erleidet seine Geschwindigkeit eine Änderung von endlicher Gröſse. Die Differentialquotienten seiner Koordinaten nach der Zeit springen plötzlich auf neue Werte über.

Denn unmittelbar vor und hinter der Unstetigkeitsstelle müssen diese Differentialquotienten, und also die Komponenten jener Geschwindigkeit, linearen Gleichungen mit endlich verschiedenen Koefficienten genügen.

675 **Folgerung 1.** Beim Durchgang durch eine Unstetigkeitslage wird die Beschleunigung unendlich groſs, jedoch in solcher Weise, daſs das Zeitintegral der Beschleunigung, genommen über die Zeit des Durchgangs, im allgemeinen einen endlichen Wert behält.

Denn dieses Zeitintegral ist die im allgemeinen endliche Änderung der Geschwindigkeit.

Folgerung 2. Erleiden die Bedingungsgleichungen des einen von zwei oder mehreren gekoppelten Systemen eine Unstetigkeit, so wird beim Durchgang durch diese Unstetigkeit die zwischen den Systemen auftretende Kraft im allgemeinen unendlich grofs, jedoch in solcher Weise, dafs das Zeitintegral der Kraft, genommen über die Zeit des Durchgangs, endlich bleibt. 676

Denn im allgemeinen werden die Komponenten der Beschleunigung des unstetigen Systems auch nach den gemeinsamen Koordinaten im Sinne der Folgerung 1 unendlich werden. Da aber die Koefficienten der Bedingungsgleichungen auch während der Unstetigkeit endlich bleiben, so ist die Kraft von der Ordnung der Beschleunigung.

Definition. Stofskraft oder kurz Stofs heifst das Zeitintegral der während des Durchgangs durch eine Unstetigkeitsstelle von einem System auf ein anderes ausgeübten Kraft, genommen über die Dauer des Durchgangs durch die Unstetigkeitsstelle. 677

Anmerkung. Bei endlicher Geschwindigkeit aller betrachteten Systeme können endliche und unendlich kleine, nicht aber unendlich grofse Stöfse vorkommen. Wir setzen die Stöfse im folgenden als endlich voraus. 678

Folgerung 1. Zu jedem Stofs giebt es immer einen Gegenstofs. Er ist das Zeitintegral der Kraft, welche das als zweites bezeichnete System auf das in der Definition zuerst genannte ausübt. 679

Folgerung 2. Ein Stofs wird stets ausgeübt von einem System, welches eine Unstetigkeit seiner Bewegung erleidet, und ausgeübt auf ein System, welches eine Unstetigkeit seiner Bewegung erleidet; er ist nicht denkbar ohne zwei solcher einander beeinflussender Systeme. 680

Aus denselben Gründen wie bei der Kraft können wir uns aber erlauben, von Stöfsen schlechthin zu reden, ohne ausdrücklich der Systeme zu gedenken, von welchen oder auf welche sie ausgeübt werden.

Folgerung 3. Ein Stofs kann stets betrachtet werden als Vektorgröfse, sowohl in Bezug auf das System, welches 681

ihn ausübt, als auch in Bezug auf das System, auf welches er ausgeübt wird. Seine Komponenten nach den gemeinsamen Koordinaten sind im allgemeinen von Null verschieden; seine Komponenten nach den nicht gemeinsamen Koordinaten sind Null; seine Komponenten in Richtungen, welche sich nicht durch Änderungen der benutzten Koordinaten ausdrücken lassen, bleiben unbestimmt.

Denn die gleiche Behauptung gilt von der Kraft, von welcher der Stofs das Zeitintegral ist.

682 **Bezeichnung.** Erleidet ein System mit den Koordinaten p_ϱ eine Unstetigkeit seiner Bewegung, so wollen wir die Komponenten des Stofses, welcher auf das System wirkt, nach den p_ϱ mit J_ϱ bezeichnen. Die Komponenten des Stofses aber, welchen das System ausübt, nach den p_ϱ, sollen mit J'_ϱ bezeichnet werden. Für das zweite System, dessen Koordinaten wir mit $\mathfrak{p}_\varrho$ bezeichnen, mögen die entsprechenden Gröfsen mit $\mathfrak{J}_\varrho$ und $\mathfrak{J}'_\varrho$ bezeichnet werden (vergl. 467). Identisch ist dann:

$$J_\varrho = \mathfrak{J}'_\varrho \quad ,$$

$$\mathfrak{J}_\varrho = J'_\varrho \quad .$$

683 **Lehrsatz.** Stofs und Gegenstofs sind einander stets entgegengesetzt gleich, d. h. es sind die Komponenten beider nach jeder Koordinate entgegengesetzt gleich, und zwar sowohl wenn wir beide Gröfsen betrachten als Vektorgröfsen in Bezug auf das eine, als auch in Bezug auf das andere System.

Denn Stoss und Gegenstofs können auch betrachtet werden als die Zeitintegrale von Kraft und Gegenkraft (vergl. 468).

In der eingeführten Bezeichnung wird der Lehrsatz wiedergegeben durch die Gleichungen:

$$J_\varrho = - J'_\varrho \quad ,$$

$$\mathfrak{J}_\varrho = - \mathfrak{J}'_\varrho \quad .$$

Zusammensetzung der Stöfse.

Lehrsatz. Ist ein System gleichzeitig mit mehreren Systemen gekoppelt, so ist ein Stofs, welchen die Gesamtheit jener Systeme ausübt, gleich der Summe der Stöfse, welche die einzelnen Systeme ausüben. 684

Denn die Behauptung gilt für jeden Augenblick der Stofszeit für die wirkenden Kräfte (471), also auch für die Integrale derselben, die Stöfse.

Folgerung. Gleichzeitig auf dasselbe System ausgeübte, oder von demselben System ausgeübte Stöfse können wie Kräfte zusammengesetzt und zerlegt werden nach den Regeln der Zusammensetzung und Zerlegung von Vektorgröfsen überhaupt. Wir reden von den Komponenten eines Stofses und von resultierenden Stöfsen in demselben Sinne, in welchem wir von Komponenten der Kraft und von resultierenden Kräften reden. (Vergl. 472 bis 474.) 685

Definition. Ein Stofs, welcher von einem einzelnen materiellen Punkt oder auf einen einzelnen materiellen Punkt ausgeübt wird, heifst ein Elementarstofs. 686

Folgerung 1. Jeder Stofs, welcher von einem materiellen System oder auf ein materielles System ausgeübt wird, kann zerlegt werden in eine Anzahl von Elementarstöfsen. (Vergl. 479.) 687

Folgerung 2. Die Zusammensetzung und Zerlegung der Elementarstöfse erfolgt nach den Regeln der Zusammensetzung und Zerlegung geometrischer Strecken. (Parallelogramm der Stöfse.) (Vergl. 478.) 688

Bewegung unter dem Einflufs von Stöfsen.

Aufgabe 1. Die Bewegung eines materiellen Systems unter dem Einflufs eines gegebenen Stofses zu bestimmen. 689

Die Lösung der Aufgabe besteht nur in der Angabe der Änderung, welche die Geschwindigkeit des Systems durch den

(689) Stofs erfährt. Es sei nun das betrachtete System dasselbe wie in 481; bedeuten die P_ϱ die Komponenten der unendlichen Kraft, welche während der Dauer des Stofses auf das System wirkt, so ist während dieser Dauer nach 481:

a) $$mf_\varrho + \sum_1^k{}_\varkappa \, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = P_\varrho \quad .$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit dt und integrieren über die Stofszeit. Da die Werte der Koordinaten während dieser Zeit konstant sind, so ist

b) $$m\int f_\varrho \, dt = q_{\varrho_1} - q_{\varrho_0} \quad ,$$

wenn wir durch den Index 0 die Gröfsen vor dem Stofse, durch den Index 1 die Gröfsen nach dem Stofse charakterisieren. Wir haben ferner nach 682:

c) $$\int P_\varrho \, dt = J_\varrho \quad ,$$

und wenn wir noch zur Abkürzung setzen:

d) $$\int P_\varkappa \, dt = J_\varkappa \quad ,$$

so erhalten wir r Gleichungen von der Form:

e) $$q_{\varrho_1} - q_{\varrho_0} + \sum_1^k{}_\varkappa \, p_{\varkappa\varrho} J_\varkappa = J_\varrho \quad .$$

Da die Geschwindigkeit des Systems vor und nach dem Stofse den Zusammenhängen des Systems genügen mufs, so erhalten wir weiter aus den k Bedingungsgleichungen des Systems k Gleichungen von der Form:

f) $$\sum_1^r{}_\varrho \, p_{\varkappa\varrho} (\dot{p}_{\varrho_1} - \dot{p}_{\varrho_0}) = 0 \quad ,$$

welche zusammen mit den Gleichungen e) als $k+r$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $k+r$ Gröfsen $\dot{p}_{\varrho_1} - \dot{p}_{\varrho_0}$

und $J_\varkappa$ oder auch für die $k+r$ Gröfsen $q_{\varrho_1}-q_{\varrho_0}$ und $J_\varkappa$ angesehen werden können, und welche also diese Gröfsen und damit die Änderung der Geschwindigkeit des Systems eindeutig bestimmen.

Anmerkung 1. Ist uns die Geschwindigkeit des Systems vor dem Stofse gegeben, und sind also die Gröfsen q_{ϱ_0} und $\dot{p}_{\varrho_0}$ bekannt, so können wir die r Gleichungen **689e** zusammen mit den k Gleichungen **689f**, oder, was dasselbe, mit den k Gleichungen **690**

$$\sum_1^r {}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\, \dot{p}_{\varrho_1} = 0$$

auch auffassen als $r+k$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $r+k$ Gröfsen $\dot{p}_{\varrho_1}$ und $J_\varkappa$, welche also diese Gröfsen und damit die Geschwindigkeit des Systems nach dem Stofse eindeutig bestimmen.

Anmerkung 2. Wenden wir rechtwinklige Koordinaten an, und bezeichnen wir die Komponente des Stofses nach der Koordinate x_ν mit I_ν, so nehmen die Gleichungen des Stofses die Form der $3n$ Gleichungen an: **691**

$$m_\nu (\dot{x}_{\nu_1} - \dot{x}_{\nu_0}) + \sum_1^i {}_\iota\, x_{\iota\nu}\, I_\iota = I_\nu \quad , \qquad \textbf{a)}$$

welche zusammen mit den i aus den Bedingungsgleichungen abgeleiteten Gleichungen:

$$\sum_1^{3n} {}_\nu\, x_{\iota\nu} (\dot{x}_{\nu_1} - \dot{x}_{\nu_0}) = 0 \qquad \textbf{b)}$$

die $3n$ Komponenten $\dot{x}_{\nu_1} - \dot{x}_{\nu_0}$ der Geschwindigkeitsänderung und die i Hülfsgröfsen I_ι eindeutig bestimmen.

Anmerkung 3. Ist die Koordinate p_ϱ eine freie Koordinate, so sind die entsprechenden Gröfsen $p_{\varkappa\varrho}$ gleich Null, und die auf p_ϱ bezügliche Stofsgleichung nimmt die einfache Form an: **692**

$$q_{\varrho_1} - q_{\varrho_0} = J_\varrho \quad .$$

Sind in einem holonomen System alle Koordinaten freie Koordinaten, so nehmen alle Gleichungen diese Form an, und die so entstehenden r Gleichungen genügen zur Bestimmung der r Gröfsen $\dot{p}_{\varrho_1}-\dot{p}_{\varrho_0}$, welche bekannte lineare Funktionen der durch jene Gleichungen unmittelbar gegebenen $q_{\varrho_1}-q_{\varrho_0}$ sind.

693 **Folgerung 1** (aus **689**). Um ein System aus der Ruhe plötzlich in eine gegebene mögliche Geschwindigkeit zu versetzen, genügt es, dem System einen Stofs zu erteilen, welcher nach Richtung und Gröfse gleich ist dem Produkt aus der gegebenen Geschwindigkeit und der Masse des Systems.

Denn sind die $q_{\varrho_0} = 0$, und genügen die gegebenen $\dot{p}_{\varrho_1}$ an sich den Bedingungsgleichungen, so genügt die Annahme:

$$J_\varkappa = 0$$

$$J_\varrho = q_{\varrho_1}$$

den Gleichungen **689e** und **f**.

694 **Folgerung 2.** Um ein bewegtes System in seiner augenblicklichen Lage plötzlich zur Ruhe zu bringen, genügt es, dem System einen Stofs zu erteilen, welcher nach Richtung und Gröfse entgegengesetzt gleich ist dem Produkt aus der Geschwindigkeit des Systems in seine Masse.

Denn sollen die $q_{\varrho_1} = 0$ werden, und genügen die $\dot{p}_{\varrho_0}$ den Bedingungsgleichungen des Systems, so genügt die Annahme:

$$J_\varkappa = 0$$

$$J_\varrho = -\, q_{\varrho_0}$$

den Gleichungen **689e** und **f**.

695 **Lehrsatz.** Die Geschwindigkeitsänderung, welche mehrere gleichzeitig wirkende Stöfse einem System erteilen, ist die Summe der Geschwindigkeitsänderungen, welche die Stöfse, einzeln wirkend, dem System erteilen würden.

Als gleichzeitig wirkend sind dabei alle Stöfse bezeichnet, welche innerhalb einer verschwindend kleinen Zeit erfolgen,

ohne Rücksicht auf ihre etwaigen Zeitunterschiede oder ihre Reihenfolge innerhalb dieser Zeit.

Der Satz folgt (vergl. 485) aus der linearen Form der Gleichungen 689e, f, er kann aber auch als unmittelbare Folgerung des Satzes 485 angesehen werden.

Anmerkung. Der Inhalt des vorigen Lehrsatzes kann auch wiedergegeben werden in der oft benutzten Form der Aussage, daſs mehrere gleichzeitig erfolgende Stöſse sich hinsichtlich der Geschwindigkeit, welche sie erzeugen, nicht stören. 696

Lehrsatz. Steht die Richtung eines Stoſses senkrecht auf jeder möglichen Verrückung des Systems, auf welches er wirkt, so übt der Stoſs keinen Einfluſs aus auf die Bewegung des Systems. Und umgekehrt: Übt ein Stoſs keinen Einfluſs aus auf die Bewegung des Systems, auf welches er wirkt, so steht er senkrecht auf jeder möglichen Verrückung desselben. 697

Der Satz kann als unmittelbare Folgerung des Satzes 488 angesehen werden oder auch in entsprechender Weise aus den Gleichungen 689e, f abgeleitet werden.

Anmerkung. Obwohl also aus der Angabe eines Stoſses eindeutig die Bewegungsänderung erschlossen werden kann, welche er erzeugt, so kann doch nicht umgekehrt aus einer plötzlichen Bewegungsänderung eindeutig auf den Stoſs geschlossen werden, welcher sie erzeugt hat. 698

Aufgabe 2. Die Stoſskraft zu bestimmen, welche ein materielles System bei gegebener plötzlicher Bewegungsänderung ausübt. 699

Nach 682 sind die Komponenten des gesuchten Stoſses zu bezeichnen mit J'_ϱ, und nach 683 und 689e sind dieselben:

$$J'_\varrho = -q_{\varrho_1} + q_{\varrho_0} - \sum_1^k {}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} J_\varkappa \quad .$$

Hierin sind die q_{ϱ_1} und q_{ϱ_0} durch die Angaben der Aufgabe bestimmt, die $J_\varkappa$ aber sind nicht gegeben, solange nicht auch die Bewegung des zweiten Systems gegeben ist, auf welches der Stoſs ausgeübt wird. Die Lösung der Aufgabe

ist also nicht eine bestimmte, sondern enthält einen unbestimmt bleibenden Summanden, welcher einen auf jeder möglichen Verrückung des Systems senkrechten Stofs darstellt (250).

700 **Anmerkung 1.** Obwohl von dem Stofs, welchen ein System bei plötzlicher Bewegungsänderung ausübt, nicht alle Komponenten durch die Bewegungsänderung des Systems bestimmt sind, so sind doch alle Komponenten in Richtung einer möglichen Bewegung durch jene Bewegungsänderung bestimmt.

701 **Anmerkung 2.** Obwohl von dem Stofs, welchen ein System bei plötzlicher Bewegungsänderung ausübt, nicht alle Komponenten durch die Bewegungsänderung des Systems bestimmt sind, so ist doch jede Komponente in Richtung einer freien Koordinate durch die Bewegungsänderung eindeutig bestimmt.

702 **Anmerkung 3.** Ist p_ϱ eine freie Koordinate, so kann der nach dieser Koordinate ausgeübte Stofs geschrieben werden in den Formen:

$$J'_\varrho = -q_{\varrho_1} + q_{\varrho_0} \quad ,$$

$$= -\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right)_1 + \left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right)_0 \quad .$$

Innerer Zwang beim Stofse.

703 **Bemerkung 1.** Trifft ein Stofs ein System materieller Punkte, zwischen welchen keine Zusammenhänge bestehen, so erfolgt eine Geschwindigkeitsänderung, deren Richtung die Richtung des Stofses ist, und deren Gröfse gleich ist der Gröfse des Stofses, dividiert durch die Masse des Systems.

704 **Bemerkung 2.** Bestehen Zusammenhänge zwischen den Punkten des gestofsenen Systems, so weicht die Geschwindigkeitsänderung im allgemeinen ab von der durch die vorige Bemerkung gegebenen. Als Ursache dieser Abweichung können wir also die Zusammenhänge des Systems betrachten.

Definition. Inneren Zwang beim Stoſse oder kurz Zwang 705
beim Stoſse nennen wir die Abänderung, welche die sämtlichen Zusammenhänge eines Systems an der Geschwindigkeitsänderung des Systems beim Stoſse hervorbringen.

Der Zwang beim Stoſse wird gemessen durch den Unterschied zwischen der wirklichen Geschwindigkeitsänderung und derjenigen Geschwindigkeitsänderung, welche bei Aufhebung sämtlicher Bedingungsgleichungen des Systems eintreten würde; er ist gleich ersterer, vermindert um letztere.

Folgerung. Der Zwang beim Stoſse ist das Zeitintegral 706
des inneren Zwanges des Systems während des Stoſses, genommen über die ganze Dauer desselben.

Aufgabe. Den Zwang eines Systems bei einem Stoſse zu 707
bestimmen.

Wir bezeichnen die Komponenten des Zwanges nach den Koordinaten p_ϱ mit Z_ϱ. Indem wir nun die Gleichung **497a** mit $m\,dt$ multiplizieren, und über die Dauer des Stoſses integrieren, erhalten wir:

$$mZ_\varrho = q_{\varrho_1} - q_{\varrho_0} - J_\varrho \quad . \qquad \text{a)}$$

Zur Bestimmung der Gröſse des Zwanges reichen die Komponenten nach beliebigen Koordinaten im allgemeinen nicht aus. Wenden wir deshalb auch rechtwinklige Koordinaten an und bezeichnen die Komponente des Zwanges nach x_ν mit Z_ν, so erhalten wir:

$$mZ_\nu = m_\nu(\dot{x}_{\nu_1} - \dot{x}_{\nu_0}) - I_\nu \quad , \qquad \text{b)}$$

also wird die Gröſse Z des Zwanges die positive Wurzel der Gleichung:

$$mZ^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \left(\dot{x}_{\nu_1} - \dot{x}_{\nu_0} - \frac{I_\nu}{m_\nu}\right)^2 \quad .$$

Lehrsatz 1. Die Gröſse des Zwanges beim Stoſse fällt 708
kleiner aus für die natürliche Bewegungsänderung, als sie ausfallen würde für irgend eine andere mögliche Bewegungsänderung.

Denn als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs bei gegebenen Werten der I_ν die Gröfse $\frac{1}{2}mZ^2$ ein Minimum werde, erhalten wir (vergl. **155**, **498**) die $3n$ Gleichungen:

$$m_\nu(\dot{x}_{\nu_1}-\dot{x}_{\nu_0}) - I_\nu + \sum_1^i{}^\iota x_{\iota\nu} I_\iota = 0 \quad ,$$

in welchen die I_ι zunächst beliebige unbestimmte Multiplikatoren bedeuten, und welche zusammen mit den i Gleichungen

$$\sum_1^{3n}{}^\nu x_{\iota\nu}(\dot{x}_{\nu_1}-\dot{x}_{\nu_0}) = 0$$

die $3n+i$ Gröfsen $\dot{x}_{\nu_1}-\dot{x}_{\nu_0}$ und I_ι eindeutig bestimmen. Da aber die Gleichungen zusammenfallen mit den Bewegungsgleichungen **691** des Systems, so wird ihnen genügt durch die natürlichen Geschwindigkeitsänderungen und nur durch diese.

709 **Anmerkung.** Der vorstehende Lehrsatz enthält die Anpassung des Gauss'schen Prinzips des kleinsten Zwanges an die besonderen Verhältnisse des Stofses.

710 **Folgerung.** Verhindern die Zusammenhänge des Systems, dafs der Winkel zwischen einem Stofse und der durch ihn hervorgerufenen Geschwindigkeitsänderung gleich Null werde (**703**), so fällt doch dieser Winkel so klein aus, als es die Zusammenhänge des Systems irgend gestatten.

Denn zeichnen wir ein ebenes Dreieck, dessen Seiten sind die Gröfse des Stofses dividiert durch die Masse des Systems, die Gröfse einer beliebigen möglichen Geschwindigkeitsänderung und die Gröfse des Unterschiedes beider, also des Zwanges, welcher jener Geschwindigkeitsänderung entspricht, so stellt der von den ersten beiden Seiten eingeschlossene Winkel ε den Winkel zwischen Stofs und Geschwindigkeitsänderung dar (**34**). Eine mögliche Geschwindigkeitsänderung von gegebener Richtung kann nun alle Gröfsen annehmen; unter allen Geschwindigkeitsänderungen von gegebener Richtung kann aber nur diejenige die natürliche sein, bei welcher der Zwang senkrecht steht auf der Geschwindigkeitsänderung (**708**). Be-

schränken wir uns also auf diejenigen Geschwindigkeitsänderungen, welche hiernach noch in Betracht kommen, so sind alle in Betracht zu ziehenden Dreiecke rechtwinklig; die Hypothenuse aller ist gleich und gegeben; die dem Winkel ε gegenüberliegende Kathete wird aber für die natürliche Geschwindigkeitsänderung kleiner als für jede andere (708), also wird für diese Geschwindigkeitsänderung der Winkel ε selbst ein Minimum, welches die Behauptung ist.

Lehrsatz 2. Die Richtung des Zwangs beim Stofse steht senkrecht auf jeder möglichen (virtuellen) Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage. 711

Denn nach 707 und 689 lassen sich die Komponenten des Zwangs darstellen in der Form:

$$-\frac{1}{m}\sum_{1}^{k}{}_{\varkappa}\, p_{\varkappa\varrho}\, J_{\varkappa} \quad ,$$

der Zwang als Vektorgröfse steht also (250) senkrecht auf jeder möglichen Verrückung des Systems. Der Satz kann auch als unmittelbare Folgerung aus dem Satz 500 gezogen werden.

Symbolischer Ausdruck. Bezeichnen wir mit δp_ϱ die Änderungen der Koordinaten p_ϱ für eine jede beliebige mögliche Verrückung des Systems, so kann der vorige Satz in die Form der symbolischen Gleichung gekleidet werden: 712

$$\sum_{1}^{r}{}_{\varrho}(q_{\varrho_1}-q_{\varrho_0}-J_\varrho)\,\delta p_\varrho = 0 \quad , \qquad \text{a)}$$

welche für die rechtwinkligen Koordinaten die Form annimmt:

$$\sum_{1}^{3n}{}_{\nu}\Big[m_\nu\,(\dot{x}_{\nu_1}-\dot{x}_{\nu_0}) - I_\nu\Big]\,\delta x_\nu = 0 \quad . \qquad \text{b)}$$

Vergl. 393, 501.

Anmerkung. Der vorige Lehrsatz (711) enthält die Anpassung des D'ALEMBERT'schen Prinzips an die besonderen 713

Verhältnisse des Stofses, die symbolische Form 712 den gewöhnlichen Ausdruck dieser Anpassung.

714 **Folgerung 1.** Beim Stofse ist die Komponente der erzeugten Bewegungsänderung in der Richtung jeder möglichen Bewegung gleich der Komponente des Stofses nach derselben Richtung, dividiert durch die Masse des Systems.

715 **Folgerung 2.** Beim Stofse ist die Komponente der erzeugten Bewegungsänderung nach jeder freien Koordinate gleich der Komponente des Stofses nach dieser Koordinate, dividiert durch die Masse des Systems.

716 **Folgerung 3.** Die Geschwindigkeitskomponente eines gestofsenen Systems nach jeder Koordinate der absoluten Lage ändert sich um einen Betrag, welcher gleich ist der Komponente des wirkenden Stofses nach der gleichen Koordinate, dividiert durch die Masse des Systems, — welches auch immer die Zusammenhänge des Systems sind.

717 **Anmerkung.** Auch ohne Kenntnis, oder ohne vollständige Kenntnis des Zusammenhangs der Massen eines Systems können wir demnach doch stets sechs Gleichungen für die Bewegung des Systems unter dem Einflufs eines Stofses angeben. Wählen wir als Koordinaten der absoluten Lage die sechs Gröfsen $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \omega_1 \omega_2 \omega_3$, welche wir in 402 einführten, so stellen die sechs Gleichungen, welche wir erhalten, die Anpassung des Prinzips des Schwerpunkts und der Flächen an die besonderen Verhältnisse des Stofses dar.

Energie, Arbeit.

718 **Definition.** Die Vermehrung der Energie eines Systems in Folge eines auf das System ausgeübten Stofses wird die Arbeit des Stofses genannt.

Eine etwaige Abnahme der Energie infolge des Stofses wird als negative Zunahme gerechnet. Die Arbeit eines Stofses kann demnach positiv oder negativ sein.

719 **Folgerung.** Die Arbeit eines Stofses ist das Zeitintegral

der Arbeit, welche diejenige Kraft leistet, deren Zeitintegral der Stofs ist.

Lehrsatz. Die Arbeit eines Stofses ist gleich dem Produkt aus der Gröfse des Stofses und der in seiner Richtung genommenen Komponente des Mittelwertes der Anfangs- und der Endgeschwindigkeit des Systems. 720

Denn welches auch in Wahrheit der Verlauf der wirkenden Kraft während der Stofszeit und die Bewegung des Systems während dieser Zeit ist, die schliefsliche Bewegung und also die Arbeit des Stofses wird dieselbe sein, als wirkte die Kraft mit konstanter mittlerer Gröfse in der Richtung des Stofses selber. Machen wir aber diese vereinfachende Voraussetzung, so wird erstens die Gröfse der wirkenden Kraft gleich der Gröfse des Stofses dividiert durch die Stofszeit. Zweitens geht die Geschwindigkeit gleichmäfsig sich ändernd aus dem Anfangs- in den Endwert über, und ihr Mittelwert ist das arithmetische Mittel ihres Anfangs- und ihres Endwertes. Die Komponente der während des Stofses zurückgelegten Bahnstrecke in Richtung des Stofses ist aber gleich der Komponente jenes Mittelwerts, multipliziert mit der Stofszeit. Berechnen wir nun nach **513** die von der Kraft während ihrer Dauer, also die vom Stofs geleistete Arbeit, so hebt sich die Stofszeit heraus, und es folgt die Behauptung.

Anmerkung. Unter Benutzung der bisherigen Bezeichnung ist der analytische Ausdruck des Lehrsatzes die Aussage, dafs die Arbeit des Stofses gleich sei: 721

$$\frac{1}{2}\sum_{1}^{r}{}_{\varrho}\, J_{\varrho}\,(\dot{p}_{\varrho_1}+\dot{p}_{\varrho_0}) \quad .$$

Folgerung 1. Die Arbeit eines Stofses ist gleich dem Produkt des Stofses und der in seiner Richtung genommenen Komponente der ursprünglichen Geschwindigkeit, vermehrt um das halbe Produkt aus der Gröfse des Stofses und der in seiner Richtung genommenen Komponente der durch ihn erzeugten Geschwindigkeitsänderung. 722

Der analytische Ausdruck hierfür ist die Aussage, es sei die Arbeit des Stofses gleich:

$$\sum_1^r{}_\varrho J_\varrho \dot{p}_{\varrho_0} + \frac{1}{2}\sum_1^r{}_\varrho J_\varrho (\dot{p}_{\varrho_1} - \dot{p}_{\varrho_0}) \quad ,$$

welche Aussage mit **721** übereinstimmt.

723 **Folgerung 2.** Die Arbeit eines Stofses, welcher ein ruhendes System in Bewegung setzt, ist gleich dem halben Produkt aus der Gröfse des Stofses und der in seiner Richtung genommenen Komponente der durch ihn erzeugten Geschwindigkeit.

Denn sind die $\dot{p}_{\varrho_0}$ gleich Null, so ist die Arbeit des Stofses gleich:

$$\frac{1}{2}\sum_1^r{}_\varrho J_\varrho \dot{p}_{\varrho_1} \quad .$$

724 **Lehrsatz.** Ein ruhendes System setzt sich unter dem Einflufs eines Stofses in derjenigen Richtung in Bewegung, bei welcher der Stofs die meiste Arbeit leistet, d. h. bei welcher er mehr Arbeit leistet, als er leisten würde, wenn wir durch Vermehrung der Zusammenhänge des Systems eine andere Richtung erzwängen. (Sogenannter Satz von Bertrand.)

Denn ist J die Gröfse des Stofses, v die Gröfse der erzeugten Geschwindigkeit, ε der Winkel zwischen beiden, so ist für jeden ursprünglichen oder auch vermehrten Zusammenhang nach **714**:

$$v = \frac{J}{m}\cos\varepsilon \quad ,$$

also die Arbeit des Stofses nach **723** gleich:

$$\frac{1}{2} J v \cos\varepsilon = \frac{J^2}{2m}\cos^2\varepsilon \quad .$$

Der Winkel ε aber nimmt für die natürliche Wirkung des Stofses nach **710** den kleinsten mit dem ursprünglichen Zusammenhang verträglichen Wert an, ε kann also durch Vermehrung der Zusammenhänge nur vergröfsert, $\cos^2\varepsilon$ also nur verkleinert werden, woraus die Behauptung folgt.

Folgerung. Die Energie, welche ein auf ein ruhendes System treffender Stofs in dem System erzeugt, fällt um so gröfser aus, je mehr Zusammenhänge des Systems wir auflösen. Der gröfste mögliche Wert jener Energie, welcher aber nur durch Auflösung aller Zusammenhänge erreicht wird, ist gleich dem Quadrat der Gröfse des Stofses, dividiert durch die doppelte Masse des Systems. 725

Zusammenstofs zweier Systeme.

Erläuterungen.

1. Wir sagen, zwei Systeme stofsen zusammen, wenn sie sich so verhalten, als hätten sie während einer sehr kurzen Zeit eine Koppelung erfahren. Diese Koppelung nehmen wir als eine direkte an, indem wir geeignete Wahl der Koordinaten beider Systeme voraussetzen (452). 726

2. Eine solche vorübergehende Koppelung haben wir aufzufassen als eine dauernde Koppelung beider Systeme mit einem dritten, unbekannten System von solcher Beschaffenheit, dafs es im allgemeinen keinen Einflufs hat auf die Bewegung jener, dafs aber in unmittelbarer Nachbarschaft solcher Lagen, in welchen gewisse Koordinaten des einen Systems gewissen Koordinaten des anderen Systems gleich werden, es diese Koordinaten vorübergehend gleich zu bleiben zwingt. Diese vorübergehend gleichbleibenden Koordinaten nennen wir die gemeinsamen Koordinaten beider Systeme. 727

3. Vor und nach dem Zusammenstofse sind die Änderungsgeschwindigkeiten der Koordinaten eines jeden der beiden zusammenstofsenden Systeme lediglich den Bedingungsgleichungen ihres eigenen Systems unterworfen. Während des Stofses aber sind die Änderungsgeschwindigkeiten der gemeinsamen Koordinaten auch an die Koppelungsgleichungen gebunden. Diese Änderungsgeschwindigkeiten müssen also, wie die Koordinaten selbst, während des Stofses beziehlich gleich geworden und eine Zeit lang gleich geblieben sein. Die 728

Zeit aber, in welcher sich diese Vorgänge abspielen, betrachten wir als verschwindend klein, und die Vorgänge in ihr als gänzlich unbekannt. Wir betrachten die Systeme nur vor und nach dem Stofse, und erwarten, dafs man von uns auch nur solche Aussagen über den Zusammenstofs verlange, welche sich ohne Kenntnis der Vorgänge während der Stofszeit aussagen lassen.

729 **Aufgabe.** Die Bewegung zweier zusammenstofsender Systeme nach dem Stofse aus ihrer Bewegung vor dem Stofse so weit zu bestimmen, als es ohne Angabe der Vorgänge während der Stofszeit möglich ist.

Es seien die p_ϱ die r Koordinaten des einen, die $\mathfrak{p}_\varrho$ die $\mathfrak{r}$ Koordinaten des anderen Systems. Die Zahl der gemeinsamen Koordinaten sei s. Beim Zusammenstofs erfährt jedes der beiden Systeme einen Stofs; es seien die Komponenten des Stofses, welchen das erste System erfährt J_ϱ; die Komponenten des Stofses, welchen das zweite System erfährt, seien $\mathfrak{J}_\varrho$. Die Gröfsen vor und nach dem Stofse seien wieder durch die Indices 0 und 1 bezeichnet.

Nun gelten erstens für alle Koordinaten des ersten Systems Gleichungen von der Form **689e** und für alle Koordinaten des zweiten Systems die entsprechenden Gleichungen. Zweitens stehen die Stöfse, welche die beiden Systeme erhalten, im Verhältnis von Stofs und Gegenstofs, also ist für alle gemeinsamen Koordinaten nach **682** und **683**:

$$J_\varrho = -\mathfrak{J}_\varrho$$

und für alle nicht gemeinsamen Koordinaten beider Systeme:

$$J_\varrho = 0 \quad , \qquad \mathfrak{J}_\varrho = 0 \quad .$$

Verbinden wir beide Beziehungen mit einander, so erhalten wir für die s gemeinsamen Koordinaten s Gleichungen von der Form:

$$\text{a)} \qquad q_{\varrho_1} - q_{\varrho_0} + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} J_\varkappa = -\mathfrak{q}_{\varrho_1} + \mathfrak{q}_{\varrho_0} - \sum_1^{\mathfrak{k}}{}_\varkappa\, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho} \mathfrak{J}_\varkappa \quad ,$$

während wir für die $(r-s)+(\mathfrak{r}-s)$ nicht gemeinsamen Koordinaten $r-s$ Gleichungen von der Form:

$$q_{\varrho_1}-q_{\varrho_0}+\sum_1^k{}_{\varkappa}\, p_{\varkappa\varrho}\, J_{\varkappa}=0 \qquad \text{b)}$$

und $\mathfrak{r}-s$ Gleichungen der Form

$$\mathfrak{q}_{\varrho_1}-\mathfrak{q}_{\varrho_0}+\sum_1^{\mathfrak{k}}{}_{\varkappa}\, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho}\, \mathfrak{J}_{\varkappa}=0 \qquad \text{c)}$$

erhalten. Die Gleichungen **a) b) c)**, zusammen mit den $k+\mathfrak{k}$ Bedingungsgleichungen beider Systeme dürfen wir auffassen als Gleichungen für die Änderungsgeschwindigkeiten $\dot{p}_{\varrho_1}$ und $\dot{\mathfrak{p}}_{\varrho_1}$, welche die Bewegung des Systems nach dem Stofse bestimmen, und für die Hülfsgröfsen $J_{\varkappa}$ und $\mathfrak{J}_{\varkappa}$. Wir haben also im Ganzen $r+\mathfrak{r}-s+k+\mathfrak{k}$ nicht homogene, lineare Gleichungen, welchen die $r+\mathfrak{r}+k+\mathfrak{k}$ Unbekannten genügen müssen, und welche diejenigen Aussagen enthalten, welche die Aufgabe verlangte.

Anmerkung. Sind die Koordinaten p_{ϱ} und $\mathfrak{p}_{\varrho}$ freie Koor- 730
dinaten ihrer Systeme, so können die Gleichungen des Zusammenstofses in einfacherer Form geschrieben werden. Es werden nämlich erhalten durch Berücksichtigung der gemeinsamen Koordinaten s Gleichungen der Form:

$$q_{\varrho_1}+\mathfrak{q}_{\varrho_1}=q_{\varrho_0}+\mathfrak{q}_{\varrho_0} \quad , \qquad \text{a)}$$

durch Berücksichtigung der nicht gemeinsamen Koordinaten des ersten Systems $r-s$ Gleichungen der Form:

$$q_{\varrho_1}=q_{\varrho_0} \quad , \qquad \text{b)}$$

durch Berücksichtigung der nicht gemeinsamen Koordinaten des zweiten Systems $\mathfrak{r}-s$ Gleichungen der Form:

$$\mathfrak{q}_{\varrho_1}=\mathfrak{q}_{\varrho_0} \quad , \qquad \text{c)}$$

zusammen also $r+\mathfrak{r}-s$ Gleichungen für die zu bestimmenden $r+\mathfrak{r}$ Unbekannten $\dot{p}_{\varrho_1}$ und $\dot{\mathfrak{p}}_{\varrho_1}$.

731 **Folgerung 1.** Die Bewegung zweier Systeme nach ihrem Zusammenstofs ist durch ihre Bewegung vor dem Zusammenstofs und durch die allgemeinen Gesetze der Mechanik noch nicht vollständig bestimmt, sondern es erfordert ihre Bestimmung noch die Angabe weiterer, aus anderen Quellen geschöpfter Beziehungen. Die Zahl dieser weiteren notwendigen Beziehungen ist gleich der Zahl der gemeinsamen Koordinaten, welche beim Zusammenstofs auftreten.

732 **Folgerung 2.** Ist es bei einem Zusammenstofs möglich, neben den Beziehungen, welche aus den allgemeinen Gesetzen der Mechanik folgen, noch so viele lineare Gleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten nach dem Stofse anzugeben, als gemeinsame Koordinaten auftreten, so ist die Bewegung nach dem Zusammenstofs durch die Bewegung vor demselben eindeutig bestimmt.

733 **Anmerkung.** Die besonderen Beziehungen, welche zur Bestimmung der Bewegung beim Zusammenstofs notwendig sind, und welche nicht aus den allgemeinen Gesetzen der Mechanik folgen, hängen ab von der besonderen Natur desjenigen Systems, welches die Koppelung bewirkt, und dessen Eigentümlichkeiten im einzelnen uns verborgen sind. Dies verborgene System ist es auch, welches die Energie aufnimmt, welche etwa aus den zusammenstofsenden Systemen verschwindet, oder welches die Energie liefert, welche in den zusammenstofsenden Systemen etwa gewonnen wird. Der erste Fall tritt z. B. ein beim unelastischen Stofse, bei welchem die unmittelbare Nachbarschaft des Stofspunktes als das koppelnde System anzusehen ist. Der zweite Fall tritt z. B. ein bei Stöfsen, welche Explosionen auslösen. Die Einzelbetrachtung dieser besonderen Verhältnisse aber gehört nicht mehr in die allgemeine Mechanik.

Schlufsbemerkung zum zweiten Buch.

734 In diesem zweiten Buche wollten wir nicht mehr denknotwendige Beziehungen zwischen den Schöpfungen unseres eigenen Geistes erörtern, sondern wir wollten erfahrungsmäfsige Zusammenhänge zwischen Gegenständen der äufseren

Beobachtung betrachten. Es war deshalb unumgänglich, dafs sich unsere Betrachtung stütze nicht allein auf die Gesetze unseres Geistes, sondern auch auf die Ergebnisse früherer Erfahrung. Als notwendigen Beitrag der Erfahrung entnahmen wir daher unserer Beobachtung der Natur das Grundgesetz.

Es mufste freilich zunächst scheinen, als sei das Grundgesetz bei weitem nicht hinreichend, um die ganze Fülle der Thatsachen zu umspannen, welche die Natur uns darbietet, und deren Darstellung die bestehende Mechanik auch bereits leistet. Denn während das Grundgesetz stetige und gesetzmäfsige Zusammenhänge voraussetzt, trägt uns die tägliche Anwendung auch unstetige und ungesetzmäfsige Zusammenhänge entgegen. Und während das Grundgesetz ausdrücklich nur von freien Systemen redet, sind wir gezwungen, auch unfreie Systeme zu behandeln. Selbst die gesetzmäfsigen, stetigen, freien Systeme der Natur fügen sich nicht alle ohne weiteres dem Grundgesetz, sondern scheinen ihm zum Teil zu widerstreiten. Wir sahen nun aber, dafs wir auch ungesetzmäfsige und unstetige Systeme behandeln konnten, indem wir ihre Ungesetzmäfsigkeiten und Unstetigkeiten als scheinbare ansahen; dafs wir auch die Bewegung der unfreien Systeme verfolgen konnten, indem wir sie als Teile von freien Systemen auffafsten; dafs endlich auch die dem Grundgesetz scheinbar widerstreitenden Systeme ihm unterworfen werden konnten, wenn wir die Möglichkeit verborgener Massen in ihnen zuliefsen. Obwohl wir neben dem Grundgesetz weder andere Erfahrungsthatsachen, noch irgend willkürliche Annahmen zuliefsen, konnten wir uns doch über das ganze Gebiet verbreiten, welches die Mechanik überhaupt beherrscht. Unsere besondere Hypothese hindert uns auch nicht, zu verstehen, dafs sich die Mechanik so entwickeln konnte und entwickeln mufste, wie sie sich thatsächlich entwickelt hat. 735

Insofern also können wir am Schlusse behaupten, dafs das Grundgesetz nicht nur notwendig, sondern dafs es auch hinreichend sei, um den Anteil der Erfahrung an den allgemeinen Gesetzen der Mechanik erschöpfend darzustellen. 736

Nachweis

der Definitionen und Bezeichnungen.

(Die beigesetzten Zahlen bedeuten die Nummern.)

Abstand zweier Lagen 29.
Adiabatische Bewegung 560.
Analytische Energie 611.
Arbeit einer Kraft, eines Stofses 510, 718.

Bahn eines Systems 97.
Bahnelement 98.
Bedingungsgleichungen 131.
Beschleunigung 273.
Bewegung 256.
Bewegungsfreiheiten 134.
Bewegungsgleichungen 367.
Bewegungsgröfse 268.

Cyklische Intensität 549.
Cyklische Koordinate 546.
Cyklisches System 549.

Denkbare Bewegung 257.
— Lage 11.
Differentialgleichungen der Bewegung 367.
Differentialgleichungen eines Systems 131.
Differenz zweier Verrückungen 51.
Dissipative Systeme, Kräfte 663.

Elementarkraft 475.
Elementarstofs 686.
Energie 282.
Entfernung zweier Lagen 29.
Entropie 585.

Fläche von Lagen 200.
Freie Koordinate 139.
Freies System 122.

Gegenkraft 456.
Gegenstofs 679.
Gekoppelte Systeme 450.
Geleitete Bewegung 431.
Geleitetes System 431.
Gemeinsame Koordinaten 452.
Geodätische Bahn 171.
Gerade Bahn 101.
Geraderes Bahnelement 151.
Geradestes Bahnelement 152.
Geradeste Bahn 153.
— Entfernung 215.
Geschwindigkeit 261.
Gesetzmäfsiger Zusammenhang 119.
Gleiche Verrückungen 25, 41.
Gleichförmige Bewegung 263.
Gleichgewicht 517.
Gleichgerichtete Verrückungen 25, 41.
Grad der Bewegungsfreiheit 134.
Gröfse einer Verrückung 23, 29.

Holonomes System 123.

Identische Verrückungen 25, 41.
Innerer Zusammenhang 117.
— Zwang 385.
— — beim Stofse 705.
Isocyklische Bewegung 560.

Kinetische Energie 605.
Komponente einer Verrückung 48.
Komponenten einer Kraft 473.
— eines Stofses 685.
— eines Vektors 241.
— nach den Koordinaten 71, 241.

(Die Zahlen bedeuten die Nummern.)

Konfiguration 14.
Konfigurationskoordinate 15.
Konservative Systeme, Kräfte 601, 662.
Koordinate der absoluten Lage 16.
Koppelung 450.
Kraft 455.
Kräfte nach den Koordinaten 460.
Kräftefunktion 563.
— eines konservativen Systems 603.
Krümmung einer Bahn 103.
Kürzeste Bahn 166.

Lage 9, 10, 54.
Länge einer Bahn 99.
— — Verrückung 23, 29.
Lebendige Kraft 605.

Maschine 531.
Masse 4.
Massenteilchen 3.
Materieller Punkt 5.
Materielles System 121.
Mathematische Energie 611.
Modell eines Systems 418.
Mögliche Bahnen, Lagen 112.
— Bewegung 258.
— Verrückungen 111.
Moment 268.
Momente nach den Koordinaten 268.
Monocyklisches System 549.

Natürliche Bewegung 312.
Neigung zweier Verrückungen 34, 43.
Nicht-konservative Systeme, Kräfte 663.

Parallele Verrückungen 25, 41.
Parameter 549.
Potentielle Energie 605.

Quadratischer Mittelwert 28.

Reduzierte Komponente 71, 241.
Resultante von Kräften 472.
Resultierender Stofs 685.
Richtung einer Bahn 99.
— — Koordinate 69.
— — Vektorgröfse 239.
— — Verrückung 24, 39.
Richtungsunterschied zweier Verrückungen 34, 43.

Schar von Flächen 209.
Senkrecht aufeinander stehende Verrückungen 45.
Senkrecht auf einer Fläche stehende Verrückung 206.
Senkrechte Trajektorie 211.
Sichtbare Massen, Bewegungen, Koordinaten 595.
Stetiger Zusammenhang 115.
Stofs, Stofskraft 677.
Summe zweier Verrückungen 50.
System materieller Punkte 6.
— mit verborgenen Massen 594.

Unendlich kleine Verrückung 54.
Unmögliche Verrückungen 111.

Vektorgröfse 237.
Verborgene Massen, Bewegungen, Koordinaten 595.
Verrückung 22, 27.
— in Richtung einer Koordinate 69.
Verrückung senkrecht auf einer Fläche 206.
Verrückungen senkrecht auf einander 45.
Virtuelle Verrückungen 111.

Winkel zweier Verrückungen 34, 43.
Wirkung 613.

Zusammenhang 109.
Zustand eines Systems 261.
Zwang 385.
— beim Stofse 705.

(Die Zahlen bedeuten die Nummern.)

x_ν — Die $3n$ rechtwinkligen Koordinaten eines Systems 13.

p_ϱ, $\mathfrak{p}_\varrho$ — Die r bez. $\mathfrak{r}$ allgemeinen Koordinaten eines Systems 13.

m_ν — Masse eines materiellen Punktes 31.

m, $\mathfrak{m}$ — Gesamtmasse eines Systems 31.

ds — Länge einer unendlich kleinen Verrückung, eines Bahnelements 55, 57.

s,p_ϱ — Neigung des Bahnelements ds gegen die Koordinate p_ϱ 75.

$\alpha_{\nu\varrho}$, $a_{\varrho\sigma}$, $b_{\varrho\sigma}$; $\mathfrak{a}_{\varrho\sigma}$, $\mathfrak{b}_{\varrho\sigma}$ — 57, 64; 553.

c — Krümmung einer Bahn 105.

$x_{\iota\nu}$, $p_{\varkappa\varrho}$, $\mathfrak{p}_{\varkappa\varrho}$ — Koefficienten der Bedingungsgleichungen 128, 130.

X_ν, $P_\varkappa$, $\mathfrak{P}_\varkappa$ — Multiplikatoren 368, 371.

S — Geradeste Entfernung eines Systems 217.

t — Die Zeit 260.

v — Gröfse der Geschwindigkeit eines Systems 265.

q_ϱ, $\mathfrak{q}_\varrho$ — Reduzierte Komponenten der Momente eines Systems 269.

f; f_ϱ — Gröfse; reduzierte Komponenten der Beschleunigung 275, 277.

E — Energie eines Systems 283. Gesamtenergie eines konservativen Systems 608.

$\mathfrak{E}$ — Energie eines cyklischen Systems 553. Potentielle Energie eines konservativen Systems 606.

T — Kinetische Energie eines konservativen Systems 606.

P_ϱ, P'_ϱ, $\mathfrak{P}_\varrho$, $\mathfrak{P}'_\varrho$, X_ν — Reduzierte Komponenten einer Kraft 460, 467, 482; 552.

J_ϱ, J'_ϱ, $\mathfrak{J}_\varrho$, $\mathfrak{J}'_\varrho$, I_ν — — — eines Stofses 682, 691.

∂_p, ∂_q; $\partial_\mathfrak{p}$, $\partial_\mathfrak{q}$ — 90, 288, 606; 553.

$\delta_\mathfrak{p}$, $\delta_\mathfrak{q}$ — 590.

Accente (x'_ν, x''_ν, p'_ϱ, etc.) bezeichnen Differentialquotienten nach der Bahnlänge, wo nicht Anderes angegeben 100.

Punkte ($\dot{p}_\varrho$, $\dot{q}_\varrho$, $\ddot{p}_\varrho$, etc.) bezeichnen Differentialquotienten nach der Zeit 260.

Indices 0 und 1 (p_{ϱ_0}, p_{ϱ_1}, $a_{\varrho\sigma_0}$, etc.) 217.

$\bar{\mathfrak{p}}_\varrho$ — 588.

(Die Zahlen bedeuten die Nummern.)

d'ALEMBERT's Prinzip 394, 448, 502, 713.
HAMILTON's Prinzip 360, 440, 631.
— Form der Bewegungsgleichungen 380.
— Funktion 623.
— charakteristische Funktion 412, 649.
— Prinzipalfunktion 415, 655.
JACOBI'sche Prinzipalfunktionen und charakteristische Funktionen 417.
LAGRANGE'sche Bewegungsgleichungen 369, 374.
— Gleichgewichtsbedingungen 525.
— Kräfte 476.
— Funktion 621.
NEWTON's Lex prima 383.
— Lex secunda 495.
— Lex tertia 469.
Prinzip der Erhaltung der Energie 340, 441.
— der kleinsten Wirkung, MAUPERTUIS' Form 355, 441, 640.
— — — — JACOBI'sche Form 349, 441, 638.
— des kleinsten Zwanges 390, 448, 709.
— des Schwerpunktes und der Flächen 404, 406, 508, 509, 717.
— der virtuellen Geschwindigkeiten 520.
— — — Arbeit 521.
POISSON'sche Form der Bewegungsgleichungen 377.

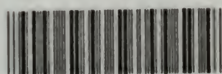
Berichtigung.

In Nummer 164, Seite 106, ist im Nenner zu setzen statt $\partial p_\varrho \partial p_\sigma$: $\partial dp_\varrho \partial dp_\sigma$.

In Nummer 577, Seite 245 Zeile 4 v. u., findet sich in einem Teile der Auflage, zufolge Verschiebung einer Letter während des Druckes, dp^λ statt dp_λ.

e Loaned

20 Fe'64			


89055056709
b89055056709a